Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger
Musterlösung – Übungsblatt 3, Aufgabe 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
M.Sc. Lukas Theis
M.Sc. Andreas Buchheit

WS 2017/2018 **29.09.2017**

Definitionen und Musterlösung

Um die Unklarheiten bezüglich Definitionen zu Surjektivität, Injektivität und Bijektivität aufzulösen gibt es eine ausführlich kommentierte Musterlösung zur entsprechenden Aufgabe.

Definitionen: Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- *surjektiv*, sofern Bildmenge $f(A)$ und Zielmenge B identisch sind. Halbmathematisch bedeutet das, dass jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urbild in A besitzt.
- *injektiv*, falls jedes Element der Zielmenge höchstens ein Urbild in A besitzt.
- *bijektiv*, falls die Abbildung injektiv und surjektiv ist.

Lösungen:

(a) $\underline{A = B = \mathbb{R}}$:

- $f(x) = \arctan(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv:
  - Bildmenge: $(-\pi/2, +\pi/2) \neq B \Longrightarrow$ nicht surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte (dass nicht alle Werte der Zielmenge angenommen werden ist kein Problem $\to$ *höchstens*) $\Longrightarrow$ injektiv
- $f(x) = x^3 - x^2$ ist surjektiv aber nicht injektiv:
  - Bildmenge: $\mathbb{R} = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - doppelte Funktionswerte (nahe um $x = 0$) $\Longrightarrow$ nicht injektiv
- $f(x) = x$ ist bijektiv:
  - Bildmenge: $\mathbb{R} = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte $\Longrightarrow$ injektiv

(b) $\underline{A = \mathbb{R},\ B = (0, \infty)}$:

- $f(x) = \arctan(x)$ ist injektiv aber nicht surjektiv:
  - Bildmenge: $(-\pi/2, +\pi/2) \neq B \Longrightarrow$ nicht surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte (dass nicht alle Werte der Zielmenge angenommen werden ist kein Problem $\to$ *höchstens*) $\Longrightarrow$ injektiv
- $f(x) = \exp\left(x^3 - x^2\right)$ ist surjektiv aber nicht injektiv:
  - Bildmenge: $(0, \infty) = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - doppelte Funktionswerte (siehe Teil (a)) $\Longrightarrow$ nicht injektiv
- $f(x) = e^x$ ist bijektiv:
  - Bildmenge: $(0, \infty) = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte $\Longrightarrow$ injektiv

(c) $\underline{A = (0, \infty),\ B = \mathbb{R}}$:

- $f(x) = x^2$ ist injektiv aber nicht surjektiv:
  - Bildmenge: $(0, \infty) \neq B \Longrightarrow$ nicht surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte (dass nicht alle Werte der Zielmenge angenommen werden ist kein Problem $\to$ *höchstens*) $\Longrightarrow$ injektiv

- $f(x) = x \cdot \sin(x)$ ist surjektiv aber nicht injektiv:
  - Bildmenge: $\mathbb{R} = B$, da für $x \to \infty$ und aufgrund der Periodizität des Sinus alle Werte in $\mathbb{R}$ angenommen werden $\Longrightarrow$ surjektiv
  - $f(x) = 0$ mehrfach wegen Periodizität $\Longrightarrow$ nicht injektiv
- $f(x) = \ln(x)$ ist bijektiv:
  - Bildmenge: $\mathbb{R} = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte $\Longrightarrow$ injektiv

(d) $\underline{A = [0,1],\ B = [0,1)}$:

- $f(x) = \frac{x}{2}$ ist injektiv aber nicht surjektiv:
  - Bildmenge: $[0, 1/2] \neq B \Longrightarrow$ nicht surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte (dass nicht alle Werte der Zielmenge angenommen werden ist kein Problem $\rightarrow$ *höchstens*) $\Longrightarrow$ injektiv
- $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ ist surjektiv aber nicht injektiv:
  - Bildmenge: $[0,1) = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - $f(x) = 0$ wird sowohl bei $x = 0$ als auch bei $x = 1$ angenommen $\Longrightarrow$ nicht injektiv
- $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \land \forall n \in \mathbb{N} : x \neq 1/n \\ 1/2, & x = 1 \\ 1/(n+1), & \forall n \in \mathbb{N} : n > 1 \land x = 1/n \end{cases}$ ist bijektiv:
  - Bildmenge: $[0,1) = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte $\Longrightarrow$ injektiv
  - Erklärung der Funktion: f bildet alle irrationalen Zahlen auf sich selbst ab. Die rationalen Zahlen werden nun so verschoben, dass man dem "problematischen" Urbild $x = 1$ den Wert $f(1) = 1/2$ zuweisen kann, ohne die Eindeutigkeit der Zuordnung zu verletzen.

(e) $\underline{A = [0,1],\ B = (0,1)}$:

- $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ ist injektiv aber nicht surjektiv:
  - Bildmenge: $[1/4, 3/4] \neq B \Longrightarrow$ nicht surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte (dass nicht alle Werte der Zielmenge angenommen werden ist kein Problem $\rightarrow$ *höchstens*) $\Longrightarrow$ injektiv
- $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 1/2, & x \in \{0,1\} \end{cases}$ ist surjektiv aber nicht injektiv:
  - Bildmenge: $(0,1) = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - $f(x) = 1/2$ mehrfach angenommen $\Longrightarrow$ nicht injektiv
- $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \land \forall n \in \mathbb{N} : x \neq 1/n \\ 1/2, & x = 0 \\ 1/3, & x = 1 \\ 1/(n+1), & \forall n \in \mathbb{N} : n > 1 \land x = 1/n \end{cases}$ ist bijektiv:
  - Bildmenge: $(0,1) = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte $\Longrightarrow$ injektiv
  - Erklärung der Funktion: Analog zum vorigen Aufgabenteil. Man baut nun allerdings zwei "problematische" Urbilder, $x \in \{0,1\}$, eindeutig ein.

(f) $\underline{A = (0,1),\ B = \mathbb{R}}$:

- $f(x) = x$ ist injektiv aber nicht surjektiv:
  - Bildmenge: $(0,1) \neq B \Longrightarrow$ nicht surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte (dass nicht alle Werte der Zielmenge angenommen werden ist kein Problem $\rightarrow$ *höchstens*) $\Longrightarrow$ injektiv
- $f(x) = \begin{cases} \cot(2\pi x), & x \neq 1/2 \\ 0, & x = 1/2 \end{cases}$ ist surjektiv aber nicht injektiv:
  - Bildmenge: $\mathbb{R} = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - $f(x) = 0$ mehrfach wegen Periodizität $\Longrightarrow$ nicht injektiv
  - Bemerkung: Man benötigt eine beliebige Zuweisung an der Stelle $x = 1/2$, damit dem dort sonst nicht existierenden Funktionswert ein Urbild zugeordnet werden kann
- $f(x) = \cot(\pi x)$ ist bijektiv:
  - Bildmenge: $\mathbb{R} = B \Longrightarrow$ surjektiv
  - keine doppelten Funktionswerte $\Longrightarrow$ injektiv