Lösung Beispielaufgabe : Explizite Koordinatenumrechnung [3]

A1

Zylinderkoordinaten: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \phi = \arctan(y/x) + n_\phi \pi$, $\quad z = z$,

Kugelkoordinaten: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad \theta = \arccos(z/r)$, $\quad \phi = \arctan(y/x) +$

mit $\theta \in [0, \pi]$, und $n_\phi \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $\phi \in [0, 2\pi[$ im richtigen Quadranten liegt.

$$P_1: \quad (x,y,z) = (3,-2,4), \quad (\rho,\phi,z) = \boxed{(\sqrt{13}, 5.69, 4)}, \quad (r,\theta,\phi) = \boxed{(\sqrt{29}, 0.73, 5.69)}$$

$x > 0, y < 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ liegt im 4. Quadrant $\quad \Rightarrow \quad \phi \in]3\pi/2, 2\pi[$

$\phi = \arctan(-2/3) + 2\pi \approx -0.59 + 6.28 = 5.69$ (entspricht 326°)

$\theta = \arccos(4/\sqrt{29}) \approx 0.73$ (entspricht 42°)

$$P_2: \quad (x,y,z) = (1,1,1), \quad (\rho,\phi,z) = \boxed{(\sqrt{2}, \pi/4, 1)}, \quad (r,\theta,\phi) = \boxed{(\sqrt{3}, 0.96, \pi/4)}$$

$x > 0, y > 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ liegt im 1. Quadrant $\quad \Rightarrow \quad \phi \in]0, \pi/2[$

$\phi = \arctan(1/1) = \pi/4$ (entspricht 45°)

$\theta = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 0.96$ (entspricht 55°)

$$P_3: \quad (x,y,z) = (-3,0,-2), \quad (\rho,\phi,z) = \boxed{(3, \pi, -2)}, \quad (r,\theta,\phi) = \boxed{(\sqrt{13}, 2.16, \pi)}$$

$x < 0, y = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ liegt auf negativer x-Achse $\quad \Rightarrow \phi = \pi$ (entspricht 180°)

$\theta = \arccos(-2/\sqrt{13}) \approx 2.16$ (entspricht 124°)

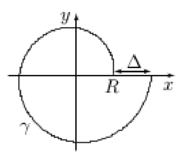
A2

Lösung Beispielaufgabe : Polarkoordinaten: Linienintegral entlang Spirale [2]

(a) $\quad \mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\rho, \quad \partial_\phi \mathbf{r} = \partial_\phi \rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\phi.$

$$W_1[\gamma_S] = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,(\partial_\phi \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}_1 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi (\partial_\phi \rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\mathbf{e}_\phi) \cdot \mathbf{e}_\phi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,(R + \tfrac{1}{2\pi}\Delta\phi) = \Big[R\phi + \tfrac{1}{4\pi}\Delta\phi^2\Big]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi R + \pi\Delta}.$$



(b) Entlang des geraden Wegs γ_G benutzen wir kartesische Koordinaten:

$\quad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x, \quad \partial_x \mathbf{r} = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x.$

$$W_2[\gamma_G] = \int_R^{R+\Delta} \mathrm{d}x\,(\partial_x \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}_2 = \int_R^{R+\Delta} \mathrm{d}x\,\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \int_R^{R+\Delta} \mathrm{d}x = \boxed{\Delta}.$$

Entlang des Spiralwegs γ_S benutzen wir Polarkoordinaten, mit $\mathbf{F}_2 = \mathbf{e}_x = \cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi$.

$$W_2[\gamma_S] = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,(\partial_\phi \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}_2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi (\partial_\phi \rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\,\mathbf{e}_\phi) \cdot (\cos\phi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi)$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\left[\tfrac{1}{2\pi}\Delta\cos\phi + (R + \tfrac{1}{2\pi}\phi\Delta)(-\sin\phi)\right]$$

$$= 0 + 0 - \tfrac{1}{2\pi}\Delta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\,\phi\sin\phi \overset{\text{part. int.}}{=} -\tfrac{1}{2\pi}\Delta(-2\pi) = \boxed{\Delta}.$$

Diskussion: Da $\mathbf{F}_2$ ein Gradientenfeld ist (mit $\mathbf{F}_2 = \boldsymbol{\nabla} x$), hängt der Wert eines Linienintegrals nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges ab. Diese sind für γ_G und γ_S gleich, [redacted]