Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **17.10.2013**
Blatt I **Fälligkeitsdatum ??.10.2013**

Übung 1 *Vektoranalysis*

a) Wende den Satz von Gauss auf die Funktion

$$\vec{v} = y^2\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + 2yz\hat{z} \tag{1}$$

auf den Einheitswürfel $\{(x, y, z)|0 \leq x, y, z \leq 1\}$ (siehe Bild 1) an. *(2 Punkt)*

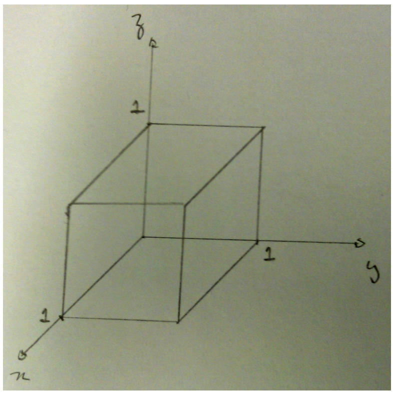

Bild 1

b) Berechne das Kurvenintegral von

$$\vec{v} = (r\cos^2\theta)\hat{r} - (r\cos\theta\sin\theta)\hat{\theta} + (3r)\hat{\phi} \tag{2}$$

entlang des Pfades in Bild 2 (die Punkte sind durch kartesische Koordinaten beschriftet). Überprüfe dein Ergebnis mit Hilfe des Satzes von Stokes.

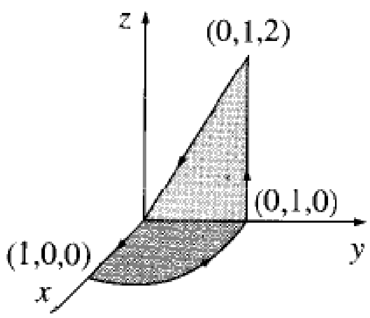

Bild 2

(2 Punkt)

Übung 2 *Dirac Delta*

a) Für $a \in R$, zeige dass,

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a) + \delta(x+a)] \tag{3}$$

gilt. Benutze

$$\delta\big(f(x)\big) = \sum_i \frac{1}{\left|\frac{df}{dx}(x_i)\right|}\delta(x - x_i), \tag{4}$$

wobei $f(x)$ nur eine einfache Nullstelle bei $x = x_i$ hat und die Summe über alle Nullstellen ist. *(1 Punkt)*

b) Prüfe Gl. (3) ohne Gl. (4). *Hinweis: Berechne die Wirkung von $\delta(x^2 - a^2)$ auf ein Integral, das man in zwei Intervall teilen kann. Zeige, dass das äquivalent zur Benutzung der rechten Seite von Gl. (3).*

(1 Punkt)

c) Berechne das Integral

$$J = \int_{\mathcal{V}} (r^2 + 2)\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) d\tau, \tag{5}$$

wobei $\mathcal{V}$ ein Kugel mit Radius R, zentriert am Ursprung, ist. *(2 Punkt)*

Übung 3 *Fourier-Transformation*

Die Fourier-Transformation $\tilde{g}(\omega) \equiv \mathcal{F}[g(t)]$ der Funktion $g(t)$ ist durch [1]

$$\tilde{g}(\omega) \equiv \mathcal{F}[g(t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} g(t)$$

definiert. Die inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ ist durch

$$\tilde{\tilde{g}}(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\tilde{g}(\omega)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{g}(\omega).$$

definiert.

a) Zeige:

$$\tilde{\tilde{\phi}}(t) = \phi(t).$$

Hinweis: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} = \delta(t)$. *(2 Punkte)*

[1] In der Literatur gibt es verschiedene Konventionen für die Vorfaktoren.

b) Zeige, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\partial_\omega \tilde{\phi}(\omega)] &= it\phi(t),\\ \mathcal{F}[\partial_t \phi(t)] &= -i\omega\phi(\omega).\end{aligned}$$

gilt. *(2 Punkte)*

Übung 4 *Vektorfeld*

Für Hinweise bezüglich Software siehe Kurs-Homepage.

Plotte die folgenden Vektorfelder

a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^2, \quad \text{where } \mathbf{r} \equiv x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,\ r = ||\mathbf{r}||,$ *(1 Punkt)*

b) $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y,$ *(1 Punkt)*

c) $\mathbf{F}(x, z) = \cos(z)\mathbf{e}_x - \sin(3z)\mathbf{e}_z,$ *(1 Punkt)*

d) Berechne $\nabla \times \mathbf{F}$ und $\nabla \cdot \mathbf{F}$ für die Vektorfelder definiert in a,b, und c.
Hinweis: In Mathematica sind die Befehle VectorPlot *und* VectorPlot3D *relevant.*
(1 Punkte)