Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **19.12.2013**
Blatt X **Fälligkeitsdatum 09.01.2014**

Übung 1 *Supraleiter*

Die Supraleitung ist ein Phasenübergang, der vielen Metallen bei sehr tiefen Temperaturen ermöglicht, elektrischen Strom ohne Widerstand zu leiten. Die Elektrodynamik von Supraleitern kann durch die London-Theorie beschrieben werden. Hier führen wir einen Parameter $\Lambda = m^*/n^*q^{*2}$ ein, eine Kombination aus Masse, Dichte und effektiver Ladung der Supraleitenden Ladungsträger (Cooper-Paare). Die erste Londongleichung ist

$$\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda \vec{J}) \,.$$

Hierbei ist $\vec{J}$ die vollständige mikroskopische Stromdichte vor dem Glätten und damit $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$. Die zweite Londongleichung ist

$$\vec{\nabla} \times (\Lambda \vec{J}) = -\vec{B} \,.$$

a) Zeigen Sie, mithilfe der ersten London- und der Maxwellgleichung, dass es sich bei bei dem Supraleiter um einen perfekten Leiter handelt, in dem elektrische und zeitabhängige Magnetfelder exponenziell abklingen. Können Sie allein mit der ersten auch etwas über statische Magnetfelder sagen? *(1 Punkt)*

b) Benutzen Sie die zweite Londongleichung zur Diskussion von Magnetfeldern an der Oberfläche. Betrachten Sie dazu zunächst einen supraleitenden Halbraum $z > 0$ mit einem von außen tangezial angelegten und ansonsten homogenen Magnetfeld $\vec{H}$. Berechnen Sie $\vec{H}$ im Supraleiter sowie die Stromdichte $\vec{J}$. *(1 Punkt)*

c) Jetzt betrachten wir eine supraleitende Kugel in einem statischen externen Magnetfeld. Berechnen Sie wiederung das gesamte Magnetfeld sowie die Stromdichte. Zeichnen Sie die Feldlinien. Bei welchem externen Magnetfeld haben Ihre Lösungen aus b) und c) das gleiche Magnetfeld an der Oberfläche?
Hinweis: Setzen Sie für das $\vec{B}$-Feld eine Form analog zum Fall der dielektrischen Kugel an. *(2 Punkte)*

Übung 2 *Residuenkalkül*

a) Es sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion zweier Argumente und auf $x^2 + y^2 = 1$ stetig. Zeige dass

$$\int_0^2 \pi d\phi \; R(\cos\phi, \sin\phi) = 2\pi i \sum_{|z|<1} \mathrm{Res}(R_1, z) \,,$$

wobei $R_1(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$. Berechnen Sie damit

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1+a\cos\phi}\,.$$

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos ax}{1+x^2}\,.$$

(1 Punkt)

c) Sei f analytisch auf einem Gebiet V. Zeigen Sie: Die Zahl der Nullstellen von f ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial V} \frac{f'(z)}{f(z)} dz\,.$$

(1 Punkt)

Übung 3 *Dielektrische Röhre*

Finden Sie das Potenzial im gesamte Raum für eine unendlich lange Röhre mit Radius R und Permittivität ϵ in einem konstanten äußeren elektrischen Feld $\vec{E}_0$, das senkrecht zur Röhrenachse liegt. *(4 Punkte)*

Übung 4 *Linear Antenne*

Betrachten Sie eine dünne Linearantenne mit Länge d, die durch ein kleine Lücke in ihrem Zentrum angeregt wird. Die Antenne ist am Ursprung zentriert und liegt entlang der z-Achse. Wenn die Dämpfung durch Strahlung vernachlässigt wird, dann ist der Strom entlang der Antenne durch

$$\vec{J}(\vec{r}) = I \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \delta(x)\delta(y)\hat{e}_z$$

gegeben, wobei $k = \omega/c$ die Wellenzahl ist und $|z| < d/2$.

a) Finden Sie die geschlossene Form des Vektorpotenzials im Strahlungsbereich. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die zeitgemittelte abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel. Zeigen Sie, dass man im Grenzfall großer Wellenlängen ($kd \ll 1$) das Dipolergebnis erhält. *(1 Punkt)*

c) Finden Sie für die besonderen Werte $kd = \pi(2\pi)$, entsprechend einer halben (einer ganzen) Wellenlänge des Stroms entlang der Antenne die Winkelverteilung der zeitgemittelten abgestrahlten Leistung und integrieren Sie über die Winkel um zu zeigen, dass

$$P = \frac{I^2}{2c} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right) dt, \qquad kd = \pi$$

$$P = \frac{I^2}{c} \left[2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right) dt\right], \qquad kd = 2\pi.$$

gilt. *(2 Punkte)*

Hinweise: Benutzen Sie die Partialbruchzerlegung um diese Ergebnis zu finden.

Merkwürdigkeit: Nummerische Berechnungen dieses Integrals zeigen, dass eine Antenne mit einer vollen Wellenlänge Strom fast drei mal mehr Leistung abstrahlt als für eine halbe Wellenlänge.