Theoretische Physik I

SS 2015 **01.07.2015**
Blatt 11 **Fälligkeitsdatum 08.07.2015**

Aufgabe 1: Trägheitstensor des homogenen Ellipsoids

1. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente Θ_i eines homogenen Ellipsoids (Masse M_E) mit den Halbachsen a, b und c.
(5 Punkte)

2. Die Massenverteilung der Erde kann durch ein homogenes Rotationsellipsoid ($a = b$) angenähert werden. Die Abplattung der Erde ist durch $(ac)/a \approx 1/300$ gegeben. Wie groß ist dann $\Delta\Theta/\Theta = (\Theta_3\Theta_1)/\Theta_3$?
(5 Punkte)

3. Bestimmen Sie den Trägheitstensor einer homogenen Kugel (Radius R, Masse M_K), auf deren Äquator vier zusätzliche Punktmassen m gleichabständig (bei $\phi = 0, \pi/2, \pi$ und $3\pi/2$) angebracht sind. Wählen Sie die Parameter R und m so, dass der Trägheitstensor gleich dem eines homogenen Rotationsellipsoids mit der Masse $M_E = M_K + 4m$ ist.
(5 Punkte)

Aufgabe 2: Abplattung der Erde

Die Erde ist in guter Näherung ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a = b > c$. Die Gravitationsenergie W_{grav} und die Masse M eines Rotationsellipsoids mit homogener Massendichte ρ_0 sind

$$W_{grav} = -\frac{3GM^2}{5a}\frac{\arcsin\epsilon}{\epsilon}$$
$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^2 c = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$$

Dabei wurden die Exzentrizität $\epsilon = (1 - c^2/a^2)^{1/2}$ und der mittlere Radius $R = (a^2c)^{1/3}$ verwendet. Das Rotationsellipsoid rotiert im körperfesten System mit dem Drehimpuls $L_3 = \Theta_3\omega_3$ um die Figurenachse. Dann ist seine Gesamtenergie

$$W_{total}(\epsilon) = T_{rot} + W_{grav} = \frac{L_3^2}{2\Theta_3(\epsilon)} + W_{grav}(\epsilon)$$

Die deformierbare Erde stellt sich nun so ein, dass W_{total} als Funktion der Exzentrizität ϵ minimal wird; dabei sind der Drehimpuls L_3 und die Masse M fest vorgegeben.

1. Entwickeln Sie W_{grav} und das Trägheitsmoment Θ_3 bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in ϵ.
(5 Punkte)

2. Berechnen Sie hieraus die Erdabplattung $(a - c)/a$.
(5 Punkte)

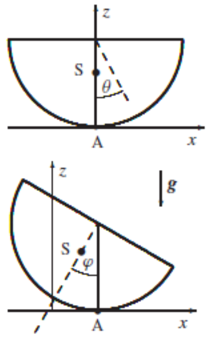
Hinweise: Tatsächlich ist die Dichte der Erde inhomogen und nimmt zum Erdmittelpunkt hin zu (Eisenkern). Ein Modell aus konzentrischen Ellipsoidschalen unterschiedlicher Dichte liefert daher bessere Ergebnisse.

Das der Erde am besten angepasste Rotationsellipsoid heißt Referenzellipsoid. Es hat die Halbachsen $a = 6378.137$km, $c = 6356.753$km und die Abplattung $(a - c)/a = 1/298.26$. Die reale Gestalt der Erde, die durch die Oberfläche der Ozeane (im hypothetischen statischen Gleichgewicht) gegeben ist, wird Geoid genannt. Dabei denkt man sich die Ozeane unter den Kontinenten fortgesetzt.

Die Abweichungen des Geoids vom Referenzellipsoid werden in der Geodätik vermessen und betragen etwa bis zu 100 Meter. Die Abweichungen rühren daher, dass das Geoid zu einer niedrigeren Energie $T_{rot} + W_{grav}$ führt als ein Rotationsellipsoid. Zusätzlich spielen auch lokale Inhomogenitäten eine Rolle, die im Geoid berücksichtigt werden.

Aufgabe 3: Schaukelbewegung einer Halbkugel

Eine starre Halbkugel mit Radius R und konstanter Massendichte ρ_0 führt im Schwerefeld eine Schaukelbewegung auf einer horizontalen Ebene aus; die Kugel rollt dabei auf der Ebene ab. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Halbkugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Symmetrieachse steht. Geben Sie die Lage des Schwerpunkts S in Abhängigkeit vom Winkel ϕ an. Stellen Sie die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage auf. Geben Sie die allgemeine Lösung an.



1. Betrachten Sie zunächst die Koordinate z_S (in Kugelkoordinaten), die im oberen Teil der Abbildung gezeigte Ruhelage. Aus Symmetriegründen gelten $x_S = 0$ und $y_S = 0$ für die Koordinaten des Schwerpunkts. Berechnen Sie die Schwerpunktskoordinate.
(3 Punkte)

2. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Halbkugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Symmetrieachse steht.
(2 Punkte)

3. Berechnen Sie die kinetische Energie des Schwerpunkts, die Rotationsenergie und die potenzielle Energie.
(5 Punkte)

4. Im Fall kleiner Auslenkungen aus der Ruhelage, entwickeln Sie die Winkelgeschwindigkeit und die allgemeine Lösung der Lagrangefunktion.
(5 Punkte)