Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **9.1.2014**
Blatt XI **Fälligkeitsdatum 16.01.2014**

Übung 1 *Punktteilchen*

In der Vorlesung haben wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung, also der Maxwellgleichung für Potenziale in Lorentzeichung, kennengelernt. Wir wollen diese jetzt auf ein Punktteilchen mit Ladung q und Trajektorie $\vec{r}(t)$ anwenden.

a) Sei $f(t)$ eine Funktion mit einfachen Nullstellen $\{t_j m\}$. Zeigen Sie, dass

$$\delta(f(t)) = \sum_j \frac{\delta(t-t_j)}{f'(t_j)}$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Skalar- und Vektorpotenziale gegeben sind durch die Lienard-Wiechert-Potenziale

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}(u)| - (\vec{r}-\vec{r}(u))\cdot\vec{v}(u)/c} \\ \vec{A}(\vec{r},t) &= \vec{v}(u)\phi(\vec{r},t)/c^2 \\ u &= t - |\vec{r}-\vec{r}(u)|/c \end{aligned}$$

Hier ist in konkreten Anwendungen das Problem, die Gleichung für die retardierte Zeit u zu lösen. *(2 Punkte)*

c) Jetzt wollen wir die resultierenden Felder berechnen. Dabei müssen wir beachten, dass die retardierte Zeit u von $\vec{r}$ und von t abhängt. Sei $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}u$ und damit $R = |\vec{r}-\vec{r}(u)| = c(t-u)$. Differenzieren Sie R parziell nacht t und zeigen Sie so

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{Rc}}$$

Was bedeutet dies für die Lösbarkeit der Bestimmungsgleichung von $u(t)$? *(2 Punkte)*

d) Differenzieren Sie R jetzt nach den Ortskoordinaten und zeigen Sie damit

$$\vec{\nabla} u = -\frac{\vec{R}}{c\left(R - \vec{R}\cdot\vec{v}/c\right)}$$

(1 Punkt)

e) Zeigen Sie damit schlussendlich, dass

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\vec{R}-\frac{v}{c}R}{\left(\vec{R}-\frac{v}{c}R\right)^3} + \frac{1}{c^2}\frac{\vec{R}\times\left(\left(\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}R\right)\times\dot{\vec{v}}\right)}{\left(\vec{R}-\frac{v}{c}R\right)^3}\right]$$

Diskutieren Sie den Nah- bzw. Fernfeldcharakter dieser beiden Terme.

Übung 2 *Lineare Antenne (Blatt X)*

Betrachten Sie eine dünne Linearantenne mit Länge d, die durch ein kleine Lücke in ihrem Zentrum angeregt wird. Die Antenne ist am Ursprung zentriert und liegt entlang der z-Achse. Wenn die Dämpfung durch Strahlung vernachlässigt wird, dann ist der Strom entlang der Antenne durch

$$\vec{J}(\vec{r}) = I\sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right)\delta(x)\delta(y)\hat{e}_z$$

gegeben, wobei $k = \omega/c$ die Wellenzahl ist und $|z| < d/2$.

a) Finden Sie die geschlossene Form des Vektorpotenzials im Strahlungsbereich. *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie die zeitgemittelte abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel. Zeigen Sie, dass man im Grenzfall großer Wellenlängen ($kd \ll 1$) das Dipolergebnis erhält. *(1 Punkt)*

c) Finden Sie für die besonderen Werte $kd = \pi(2\pi)$, entsprechend einer halben (einer ganzen) Wellenlänge des Stroms entlang der Antenne die Winkelverteilung der zeitgemittelten abgestrahlten Leistung und integrieren Sie über die Winkel um zu zeigen, dass

$$P = \frac{I^2}{2c}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt, \qquad kd = \pi$$

$$P = \frac{I^2}{c}\left[2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\right], \qquad kd = 2\pi.$$

gilt. *(2 Punkte)*

Hinweise: Benutzen Sie die Partialbruchzerlegung um diese Ergebnis zu finden.

Merkwürdigkeit: Nummerische Berechnungen dieses Integrals zeigen, dass eine Antenne mit einer vollen Wellenlänge Strom fast drei mal mehr Leistung abstrahlt als für eine halbe Wellenlänge.

Übung 3 *Bewegte Ladung*

Betrachten Sie eine Punktladung q, die sich mit konstanter (nicht-relativistischer) Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt.

a) Zeigen Sie, dass die Ladung keine Energie abstrahlt. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die retardierten Skalar- und Vektorpotenziale. *(2 Punkte)*