Theoretische Physik III

SS 2013 **2.5.2013**
Blatt III **Fälligkeitsdatum 10.5.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_III

Die Klausur findet in der letzten Vorlesung des Semesters am 26. Juli 2013 bereits ab 14 Uhr statt.

Übung 1 *Projektionsoperator*

Eine Abbildung $\hat{P}$ des Hilbertraums $\mathcal{H}$ auf den Unterraum $\mathcal{H}'$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $\hat{P}$ hermitesch ($\hat{P}^\dagger = \hat{P}$) und idempotent ($\hat{P}\hat{P} = \hat{P}$) ist. Sei $\hat{P}_A$ eine orthogonale Projektion auf den Unterraum $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$ und $\hat{P}_B$ eine orthogonale Projektion auf den Unterraum $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}$. Zeige, dass die Bedingung $[\hat{P}_A, \hat{P}_B] = 0$

a) notwendig und *(1.5 punkte)*

b) hinreichend ist *(1.5 punkte)*

dass auch $\hat{P}_A\hat{P}_B$ eine orthogonale Projektion darstellt.

c) Auf welchen Teilraum von $\mathcal{H}$ projeziert $P_A P_B$ in diesem Fall? *(1 punkte)*

Übung 2 *Endlicher Potenzialtopf*

Löse die Schrödinger Gleichung für ein Teilchen in einem endlichen Potenzialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 & |x| < a \end{cases} \tag{1}$$

wobei $V_0 > 0$.

a) Finde die Streuzustände, also die Lösungen für ein von links einlaufendes Teilchen mit Energie $E > 0$ *(2 punkte)*

b) Finde die gebundenen Zustände ($0 > E > V_0$). Das erfordert am Ende das Finden der Nullstelle einer transzendenten (also nicht-polynomialen) Funktion. Diskutiere diese Nullstellen grafisch, gerne unter Zuhilfenahme eines Computers. *(2 punkte)*

c) Diskutiere die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit, das Teilchen außerhalb des Potenzialtopfs zu finden, von der Energie. *(1 punkt)*

Übung 3 *Eigenschaften des Hilbertraums*

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\langle\cdot|\cdot\rangle$ das innere Produkt zweier Vektoren. Zeige, dass $\forall\, |x\rangle\,,\ |y\rangle \in \mathcal{H}$

a) $|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\,\langle y|y\rangle$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Eine Methode hier ist es, eine geeignete Linerarkombination $|z\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle$ zu bilden. Mit den richtigen α und β folgt das Ergebnis aus $\langle z|z\rangle \geq 0$ *(1 punkt)*

b) $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ definiert eine Norm auf $\mathcal{H}$, d.h. dass $||\cdot||$ definit, absolut homogen, und subadditiv ist. *(1 punkt)*

c) Annehme, dass $\|x - x'\| < \varepsilon$ und $\|y - y'\| < \varepsilon$ für $|x\rangle$, $|x'\rangle$, $|y\rangle$, $|y'\rangle \in \mathcal{H}$. Zeige, dass

$$|\,\langle x|y\rangle - \langle x'|y'\rangle\,| < \varepsilon\,(\|y\| + \|x'\|)$$

(1 punkte)