

Theoretische Physik I/II

WS 2016/17
Übungsblatt IV

25.11.2016
Abgabedatum 02.12.2016

Dr. Ferdi Schank

<http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre>

... Ja, nur eine Aufgabe!

Aufgabe 1 *Reduktion vom Zwei- zum Einkörperproblem - ... Erweitert*

Wir betrachten nun Gl. (16) vom Blatt III etwas genauer. Gemäß Blatt III gilt

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{Gm_1m_2}{r} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1)$$

Wir untersuchen nun sechs unterschiedliche Fälle, einmal für verschwindenden und einmal für nicht-verschwindenden Drehimpuls L . Wir beginnen mit dem Fall, dass der Drehimpuls Null ist.

- Es sei $L = 0$ und $E = 0$. Berechnen Sie $r(t)$ für die Randbedingung $r(0) = 0$. (2.0 Punkte)
- Es sei $L = 0$ und $E < 0$. Nutzen Sie die Substitution $r = 2a \sin^2(\eta/2)$ (mit Anfangsbedingung $r(\eta = 0) = 0$ und $t(\eta = 0) = 0$) um zu berechnen, wann das Projektil zu $r = 0$ zurückkehrt. Sie können darüber hinaus die Proportionalitätskonstante für Keplers Drittes Gesetz bestimmen. (4.0 Punkte)
- Es sei $L = 0$ und $E > 0$. Die gewöhnlichen trigonometrischen müssen hier mit hyperbolischen Funktionen ersetzt werden. Nutzen Sie $r = 2a \sinh^2(\eta/2)$ um einen Ausdruck für $t(\eta)$ zu finden, wobei dieselben Anfangsbedingungen wie in b) vorausgesetzt werden. Wieso macht es hier keinen Sinn, nach dem Zeitpunkt zu Fragen, zu dem r ein zweites Mal Null wird? (3.0 Punkte)

Nun ist $L \neq 0$.

- $E = 0$ und wir definieren $r_0 \equiv L^2/(\mu Gm_1m_2)$, $\varepsilon^2 \equiv 1 + 2EL^2/(Gm_1m_2)^2$ und $r_{\min} \equiv r_0/(1 + \varepsilon)$. Nutzen Sie die Substitution $r - r_{\min} = r_{\min}\eta^2/2$ mit Anfangsbedingungen $t = 0$, $\eta = 0$ und $r(0) = r_{\min}$ um $t(\eta)$ zu bestimmen. (2.0 Punkte)
- $E < 0$. Setze $E = -Gm_1m_2/(2a)$ mit $a > 0$ und $r_0 = a(1 - \varepsilon^2)$. Lösen Sie Gl. (1) mit Hilfe der Substitution $r = a(1 - \varepsilon \cos(\eta))$. (4.0 Punkte)
- $E > 0$. Setze $E = Gm_1m_2/(2a) > 0$ mit $a > 0$ und $r_0 = a(\varepsilon^2 - 1)$. Bestimmen Sie $t(\eta)$ für die Substitution $r = a\varepsilon \cosh(\eta) - a$. (3.0 Punkte)