Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **07.11.2013**
Blatt IV **Fälligkeitsdatum 14.11.2013**

Übung 1 *Einfache Dipole und Quadrupole*

a) Ein dünner nichtleitender Stab verlaufe von $z = -a$ bis $z = a$ und trage die eindimensionale Ladungsdichte $\lambda(z)$. Finde für jeden der drei folgenden Fälle den führenden Term der Multipolentwicklung des Potenzials.

1. $\lambda = k \cos(\pi z/2a)$ *(1 Punkt)*
2. $\lambda = k \sin(\pi z/a)$ *(1 Punkt)*
3. $\lambda = k \cos(\pi z/a)$, *(1 Punkt)*

b) Zeige, dass das Quadrupolmoment ortsunabhängig ist, falls sowohl das Mono- als auch das Dipolmoment verschwinden. *(2 Punkte)*

Übung 2 *Beschränkte Ladungsverteilungen*

a) Wir betrachten einen unendlich dünnen Ring in der xy-Ebene um den Urpsrung mit Radius r, der homogen geladen ist. Berechne das Potenzial entlang der z-Achse. *(1 Punkt)*

b) Berechne die Gesamtladung, das Dipol- und das Quadrupolmoment des Ringes sowie das daraus resultierende Potenzial. Vergleiche Dein Ergebnis mit dem aus dem vorherigen Aufgabenteil *(2 Punkte)*

Übung 3 *Faltungssatz und Satz von Helmholtz*

a) Die Fouriertransformierte einer Funktion f von d Veränderlichenist definiert als

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int \frac{d^d r}{(2\pi)^{d/2}} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

wobei $\vec{r}$ und $\vec{k}$ d-dimensionale Vektoren sind. Die Rücktransformation ist

$$f(\vec{r}) = \int \frac{d^d r}{(2\pi)^{d/2}} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Es gelte jetzt $\tilde{h} = \tilde{f}\tilde{g}$ für Funktionen f, g, h. Zeige, dass

$$f(\vec{r}) = \int \frac{d^d r'}{(2\pi)^{d/2}} f(\vec{r}')g(\vec{r} - \vec{r}')$$

ist. Nutze dazu

$$\int d^d k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^d \delta^d(\vec{x})$$

(1 Punkt)

b) Sei jetzt $d = 3$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich jedes Vektorfeld $\vec{V}$ durch seine Quellen und Wirbel ausdrücken lässt als

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla} \times \vec{W}$$

Finde analog zur Vorlesung Ausdrücke für $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\vec{W}}$ *(1 Punkt)*

c) Nutze den Faltungssatz um ψ und $\vec{W}$ explizit für gegebenes V anzugeben. Dabei ist es nützlich in der Vorlesung nachzuschauen, was g ist wenn $\tilde{g} = 1/k^2$ ist. *(2 Punkte)*

Übung 4 *Weitere Eigenschaften von Fouriertransformation und Diracdelta*

a) Mit den Definitionen aus Aufgabe 2, beweise den Satz von Parseval

$$\int d^d r \; |g(\vec{r})|^2 = \int d^d k \; |\tilde{g}(\vec{r})|^2$$

(1 Punkt)

b) Es sei $f(\vec{r}) = \delta^d(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Berechne $\tilde{f}(\vec{k})$. Zeige damit die oben benutzte Identität

$$\int d^d k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^d \delta^d(\vec{x})$$

(1 Punkt)

c) Das Dirac-Delta ist ein sehr singuläres Objekt und in der physikalischen Anwendung oft eine Idealisierung. Eine Funktionenfolge $f_n(x)$ nähert das Diracdelta an wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f_n(x) = 1$$

und für $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$$

ist. Gib eine Wahl von γ_n und a_n an so dass die Lorentzkurven

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x^2 + \gamma_n^2}$$

das Diracdelta annähert.

d) WIr betrachten die Fouriertransformation für $d = 1$. Es sei i) $f(x)$ reellwertig und ii) $f(x)$ gerade, also $f(x) = f(-x)$. Welche Symmetrien ergeben sich daraus für $\tilde{f}$.