Lösung Beispielaufgabe 1: Volumen und Trägheitsmoment eines Kegelstumpfs [2]

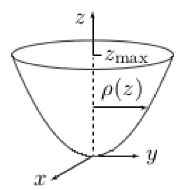
Für Zylinderkoordinaten, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, z, laut das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\rho$ und der senkrechte Abstand zur Symmetrieachse $d_\perp^2 = x^2+y^2 = \rho^2$. Der homogene Körper K hat Dichte $\rho_0 = M/V_K$. Das Integrationsgebiet lautet: $0 \le \phi \le 2\pi$, $H \le z \le 2H$, $0 \le \rho \le az$, also hat das ρ-Integral eine z-abhängige Obergrenze und muss vor dem z-Integral berechnet werden:

(a) $$V_K(a) = \int_K \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_H^{2H}\mathrm{d}z\int_0^{az}\mathrm{d}\rho\,\rho = 2\pi\int_H^{2H}\mathrm{d}z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{az} = \pi a^2\int_H^{2H}\mathrm{d}z\,z^2$$

$$= \pi a^2\left[\frac{z^3}{3}\right]_H^{2H} = \boxed{\frac{7\pi a^2}{3}H^3}.$$

(b) $$I_K(a) = \int_K \mathrm{d}V\,\rho_0\,\rho^2 = \rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_H^{2H}\mathrm{d}z\int_0^{az}\mathrm{d}\rho\,\rho^3 = 2\pi\int_H^{2H}\mathrm{d}z\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{az}$$
$$= \rho_0\frac{\pi a^4}{2}\int_H^{2H}\mathrm{d}z\,z^4 = \rho_0\frac{\pi a^4}{2}\left[\frac{z^5}{5}\right]_H^{2H} = \rho_0\frac{31\pi a^4}{10}H^5 = \boxed{\frac{93a^2}{70}MH^2}.$$

Lösung Beispielaufgabe 2: Volumen- und Flächenintegral: Rotationsparaboloid [3] (T0_013'



(a) In Zylinderkoordinaten ist der Rotationsparaboloid P definiert durch $z(\rho) = \rho^2$, bzw. $\rho(z) = \sqrt{z}$. Sein Volumen ist:
$$V = \int_K \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{z_{\max}}\mathrm{d}z\int_0^{\rho(z)}\mathrm{d}\tilde\rho\,\tilde\rho = 2\pi\int_0^{z_{\max}}\mathrm{d}z\,\frac{z}{2} = \boxed{\tfrac{\pi}{2}\,z_{\max}^2}.$$

(b) Die Fläche A des gekrümmten Anteils der Oberfläche von K berechnet sich wie folgt:

Parametrisierung von P: $\mathbf{r}(\phi, z) = \rho\,\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z$, mit $\rho = \rho(z) = \sqrt{z}$.
Tangentialvektoren: $\partial_\phi\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\phi$, $\partial_z\mathbf{r} = \rho'\,\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z$, mit $\rho' = \partial_z\rho(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

Es gilt: $$\|\partial_\phi\mathbf{r}\times\partial_z\mathbf{r}\| = \left[(\partial_\phi\mathbf{r})^2(\partial_z\mathbf{r})^2 - \partial_\phi\mathbf{r}\cdot\partial_z\mathbf{r}\right]^{\frac12}$$
$$= \left[\rho^2\left(\rho'^2+1\right) - 0\right]^{\frac12} = \sqrt{z}\left[\frac{1}{(2\sqrt{z})^2}+1\right]^{\frac12} = \left[\tfrac14 + z\right]^{\frac12}.$$

Paraboloide Fläche: $$A = \int_P \mathrm{d}S = \int_P \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\|\partial_\phi\mathbf{r}\times\partial_z\mathbf{r}\| = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{z_{\max}}\mathrm{d}z\left[\tfrac14+z\right]^{\frac12}$$
$$= 2\pi\tfrac23\left[\tfrac14+z\right]^{\frac32}\Big|_0^{z_{\max}} = \boxed{\tfrac{\pi}{6}\left[(1+4z_{\max})^{\frac32}-1\right]}.$$