Theoretische Physik I/II

WS 2016/17 **02.12.2016**
Übungsblatt V **Abgabedatum 09.12.2016**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre

Aufgabe 1 *Response eines getriebenen, harmonischen Oszillators*

Ein harmonischer Oszillator sei beschrieben durch

$$M\tfrac{d^2}{dt^2}x(t) + \gamma\tfrac{d}{dt}x(t) + \kappa x(t) = F_1(t) \tag{1}$$
$$M\tfrac{d^2}{dt^2}y(t) + \gamma\tfrac{d}{dt}y(t) + \kappa y(t) = F_2(t), \tag{2}$$

mit $F_1(t) = F_0\cos(\omega t)$ und $F_2(t) = F_0\sin(\omega t)$. Nutzen Sie die Kommutation von Differentiation und Addition, um mit $z(t) = x(t) + iy(t)$ die Antwort $G(\omega) \equiv |z_0|/F_0$ des Systems auf die Amplitude der antreibenden Kraft zu berechnen, wobei $|z_0|$ den Betrag des zeitunabhängigen Teils von $z(t)$ bezeichnet. Wie lautet die Resonanzfrequenz ω_0? Wie groß kann die Auslenkung z_0 bei ω_0 werden? *(4.0 Punkte)*

Aufgabe 2 *Eine tiefergehende Betrachtung des gedämpften harmonischen Oszillators*

Gegeben sei ein durch $F_x(t) = F_0\cos(\omega t)$ angetriebenen harmonischen, gedämpften Oszillator dessen Dynamik durch

$$F_0(\cos(\omega t)) = m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) \tag{3}$$

beschrieben wird.

a) Bestimmen Sie x_0 und ϕ für die Lösung $x(t) = x_0\cos(\omega t + \phi)$. *(2.0 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz $\omega_{\max}$ für die $x_0 = x_0(\omega)$ extremal ist. *(1 Punkt)*

c) Geben Sie $\omega_{\max}$ und $x_0(\omega = \omega_{\max})$ für den Fall schwacher Dämpfung ($\omega_0 \gg b/m$)) an (ω_0 ist die Resonanzfrequenz). *(0.5 Punkte)*

Um die zeitlich gemittelten Werte für potentielle und kinetische Energie des Oszillators zu bestimmen, müssen wir zunächst ein paar Integralausdrücke berechnen.

d) Berechnen Sie für $T = 2\pi/\omega$: $T^{-1}\int_0^T \sin^2(\omega t + \phi)dt$, $T^{-1}\int_0^T \cos^2(\omega t + \phi)dt$ und $T^{-1}\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt$. *(1.5 Punkte)*

Allgemein lässt sich eine über eine Periodenlänge T gemittelte Funktion als $\langle f\rangle \equiv T^{-1}\int_0^T f(t)dt$ definieren. Für den harmonischen Oszillator gilt für dessen kinetische Energie $K(t) = 1/2mv^2(t)$ und potentielle Energie $U(t) \equiv 1/2kx^2(t)$.

e) Berechnen Sie $\langle K \rangle = \langle K(\omega) \rangle$, $\langle U \rangle = \langle U(\omega) \rangle$, sowie die Gesamtenergie $\langle E(\omega) \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle$. *(1.5 Punkte)*

f) Plotten Sie die zeitgemittelte Energie in Abhängigkeit von ω. Geben Sie einen vereinfachten Ausdruck für den schwach gedämpften Oszillator, $b/m \ll 2\omega_0$. Nehmen Sie dazu an, dass $\omega \approx \omega_0$ und $\omega_0^2 - \omega^2 = 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ (wieso ist diese Approximation gerechtfertigt?). *(2.0 Punkte)*

g) Bestimmen Sie zunächst die allgemeine zeitgemittelte Leistung $\langle P(\omega) \rangle = T^{-1} \int_0^t F_x(t) v_x(t) dt$ und dann $\langle P(\omega) \rangle$ für $b/m \ll 2\omega_0$, nutzen Sie die Gleiche Approximation wie in Teil f). *(1.5 Punkte)*

h) Berechnen Sie die Leistung, die durch die Reibungskraft $F_{\text{res}} = -bv_x$ verloren geht. *(0.5 Punkte)*

i) Falls mit ω_+ und ω_- die Kreisfrequenzen bezeichnet werden, bei denen die zeitgemittelte Energie grade die Hälfte ihres maximalen Wertes besitzt, bestimmen Sie die Breite FWHM $\Delta\omega \equiv \omega_+ - \omega_-$ für den Fall $b/m \ll 2\omega_0$, sowie den Qualitätsfakor $Q \equiv \omega_0/\Delta\omega$. *(1.5 Punkte)*

Aufgabe 3 *Nicht-Quadratische Potentiale*

Jedes Objekt, welches einer Kraft ausgesetzt ist die aus einem quadratischen Potential

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2}k(x - x_{\text{eq}})^2 \tag{4}$$

stammt, wird eine harmonische Bewegung ausführen. k ist hier die Federkonstante, x_{eq} ist die Gleichgewichtslage und U_0 hängt vom Referenzpunkt x_{ref} ab, bei der die potentielle Energie Null ist.

a) Bestimmen Sie U_0 und drücken Sie Gl. (4) in Abhängigkeit der Position x_0 an der das Potential minimal ist aus. *(1 Punkt)*

Wir betrachten nun ein nicht-quadratisches Potential

$$U(x) = -U_1 \left((x/x_1)^3 - (x/x_1)^2 \right), \tag{5}$$

mit stabilem Minimum $x_0 = 0$ und instabilem Maximum x_1 und positiver Konstante U_1.

b) Zeigen Sie, dass für $|x - x_0|$ hinreichend klein, $U(x)$ aus Gl. (5) ein harmonisches Potential darstellt und geben Sie dieses an. *(2.5 Punkte)*

c) Nutzen Sie Newtons zweites Gesetz, $F = m_{\text{eff}}\ddot{x}(t)$, um einen Ausdruck für die Eigenfrequenz eines Zwei-Teilchen-Systems mit reduzierter Masse μ_{red} anzugeben. *(1 Punkt)*

Nun sei das Potential durch

$$U(x) = U_0 \left(-2(x/x_0)^2 + (x/x_0)^4 \right) \tag{6}$$

mit positiven Konstanten x_0 und U_0.

d) Finden Sie die Gleichgewichtspunkte für dieses Potential und geben Sie an, welche stabil/instabil sind (begründen!). Berechnen Sie $U(x)/U_0$ an diesen Punkten und zeichnen Sie $U(x)/U_0$. Finden Sie zudem die Kreisfrequenz für ein Teilchen welches um eine kleine Verrückung aus einem (stabilen) Gleichgewichtspunkt verschoben wurde. *(4.0 Punkte)*