Lösung Beispielaufgabe 1: Matrixmultiplikation [2]

Ein Matrixprodukt AB ist nur dann definiert, wenn A so viele Spalten hat wie B Zeilen. Die möglichen Produkte von zwei der Matrizen P, Q und R sind somit:

$$PQ = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -12 \\ 4 & 28 & 16 \end{pmatrix}, \quad PR = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & 28 \end{pmatrix}.$$

$$QR = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 10 & -26 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}, \quad RP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -9 & 3 \\ 8 & 1 & -7 \\ -8 & -15 & 25 \end{pmatrix}.$$

$$QQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 10 & -26 & 6 \\ -4 & -6 & -28 \end{pmatrix}.$$

Lösung Beispielaufgabe 2: Matrix-Inversion [Bonus]

(a) Die Inverse von $M_2 = \begin{pmatrix} 1+m & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ folgt mittels der Formel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

$$M_2^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{1+m} & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}}. \quad \text{Check: } \begin{pmatrix} \frac{1}{1+m} & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \checkmark$$

Wir bestimmen die Inverse von $M_3 = \begin{pmatrix} 1+m & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ mittels dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{lccc|ccc} [1]: & 1+m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ [2]: & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ [3]: & 1 & 0 & m & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rccc|ccc} \frac{1}{1+m}[1]: & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+m} & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}([2] - \frac{1}{1+m}[1]): & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{m(1+m)} & \frac{1}{m} & 0 \\ \frac{1}{m}([3] - \frac{1}{1+m}[1]): & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m(1+m)} & 0 & \frac{1}{m} \end{array}$$

Der rechte Teil der erweiterten Matrix liefert die inverse Matrix M_3^{-1}:

$$M_3^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{1+m} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & \frac{1}{m} & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}}. \quad \text{Check: } \begin{pmatrix} \frac{1}{1+m} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & \frac{1}{m} & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+m & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \checkmark$$

(b) Die Ergebnisse von M_2^{-1} und M_3^{-1} haben folgende Eigenschaften: $\frac{1}{1+m}$ für das erste Diagonalelement, ansonsten $\frac{1}{m}$ entlang der Diagonale und $-\frac{1}{m(1+m}$ entlang der ersten Spalte. Die in (a) durchgeführten Checks illustrieren, warum diese Eigenschaften benötigt werden. Wir stellen also folgende Vermutung auf für die Form von M_n^{-1} für ein allgemeines n:

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & \frac{1}{m} & 0 & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{m(1+m)} & 0 & \frac{1}{m} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen die Vermutung durch explizite Berechnung: liefert $M_n^{-1} M_n = \mathbb{1}$?

$$M_n^{-1} \cdot M_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & \frac{1}{m} & 0 & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{m(1+m)} & 0 & \frac{1}{m} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{1}{m(1+m)} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & m & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & m & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+m}{1+m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1+m}{m(1+m)} + \frac{1}{m} + 0 + \dots & \frac{m}{m} & 0 & \ddots & \vdots \\ -\frac{1+m}{m(1+m)} + 0 + \frac{1}{m} + 0 + \dots & 0 & \frac{m}{m} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{1+m}{m(1+m)} + 0 + \dots + 0 + \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 & \frac{m}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \checkmark$$

(c) Alternative Formulierung in der Indexschreibweise: $(M_n^{-1})^i_{\ j} = \boxed{\frac{1}{m}\left(\delta^i_{\ j} - \frac{1}{1+m}\delta^1_{\ j}\right)}$.

$$\begin{aligned} (M_n^{-1} \cdot M_n)^i_{\ j} &= \sum_l (M_n^{-1})^i_{\ l} (M_n)^l_{\ j} = \sum_l \left(\frac{1}{m}\delta^i_{\ l} - \frac{1}{m(1+m)}\delta^1_{\ l}\right)\left(m\delta^l_{\ j} + \delta^1_{\ j}\right) \\ &= \delta^i_{\ j} + \frac{1}{m}\delta^1_{\ j} - \frac{1}{1+m}\delta^1_{\ j} - \frac{1}{m(1+m)}\delta^1_{\ j} = \delta^i_{\ j} + \delta^1_{\ j}\frac{1+m-m-1}{m(1+m)} = \boxed{\delta^i_{\ j}}. \checkmark \end{aligned}$$