Theoretische Physik I/II

WS 2016/17 **09.12.2016**
Übungsblatt VI **Abgabedatum 16.12.2016**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre

Aufgabe 1 *Gekoppelte Oszillatoren*

Gegeben seien zwei Massen $m_1 = m_2 = m$ welche mit der Wand durch Federkonstanten k_1 und k_2 und miteinander über k' gekoppelt sind (siehe Abb. 1). Die Bewegung soll nur entlang der x-Achse stattfinden, somit hat das System nur zwei Freiheitsgrade x_1 und x_2, welche jeweils vom Gleichgewichtspunkt O_1, bzw. O_2 aus gemessen werden. Wie wir aus vorherigen Übungen wissen, würden die Oszillatoren ohne Feder (ungekoppelt) k' mit den Kreisfrequenzen $\omega_{10} = \sqrt{k_1/m}$ und $\omega_{20} = \sqrt{k_2/m}$ schwingen.

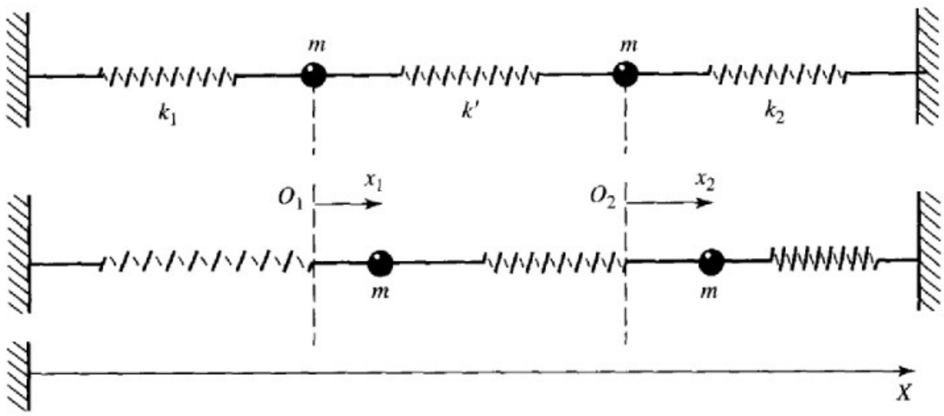

Abbildung 1: Zwei harmonische Oszillatoren welche durch eine Feder mit Kopplungskonstante k' miteinander verbunden sind.

a) Bestimmen Sie die Frequenzen mit denen das System schwingt, für den Fall, dass die Oszillatoren zusätzlich durch die Feder k' miteinander gekoppelt sind und gleiche Kopplung $k_1 = k_2 = k$ besitzen. Über die Lagrange-Gleichungen erhalten Sie für (x_1, x_2) dabei zwei gekoppelte Differentialgleichungen die simultan gelöst werden müssen. *(7.0 Punkte)*
Hinweis: Der Ansatz $x = Ae^{i\omega t}$ könnte hilfreich sein.

b) Führen Sie nun *Normalkoordinaten* $X_1 = x_1 + x_2$ und $X_2 = x_1 - x_2$ ein, wobei x_1 und x_2 die (zeitabhängigen) Lösungen aus Aufgabenteil a) sind. Die Koordinaten X_1 und X_2 entsprechen neuen Oszillationsmoden, welche jeweils mit einer einzigen Frequenz schwingen. Für jede Normalmode schwingen die Koordinaten (hier x_1 und x_2) mit derselben Frequenz. Normalerweise werden alle Normalkoordinaten simultan angeregt, außer in einigen Ausnahmefällen. Ist jedoch eine Mode zu Beginn nicht angeregt, so wird sie dies auch nicht zu einem späteren Zeitpunkt werden. Geben Sie die Frequenz der symmetrischen Mode ($X_2 = 0$, $X_1 \neq 0$) und der antisymmetrischen Mode ($X_1 = 0$, $X_2 \neq 0$)

an. Zeigen Sie zudem, dass in Normalkoordinaten sowohl kinetische als auch potentielle Energie homogene, quadratische Funktionen sind (sprich: es treten keine gemischt-Terme auf). *(3.0 Punkte)*

Aufgabe 2 *Tensor-Fromulierung kleiner Oszillationen*

Für ein System mit $3n$ Freiheitsgraden und generalisierten Koordinaten $(q_1, q_2, ..., q_{3n})$ lassen sich für kleine Oszillationen um eine stabile Gleichgewichtskonfiguration $(q_{10}, q_{20}, ..., q_{3n0})$ die Lagrangegleichungen schreiben als

$$\sum_{m=1}^{3n} \left[V_{lm} A_m - \omega^2 T_{lm} A_m \right] = 0, \qquad l = 1, 2, ..., 3n, \tag{1}$$

wobei

$$V_{lm} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_l q_m} \right) \Bigg|_{q_l = q_{l0}, q_m = q_{m0}} = V_{ml} = \text{ konstant.} \tag{2}$$

$$T_{lm} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}_{q_{l0}} \right) \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_m}_{q_{m0}} \right). \tag{3}$$

V_{lm} und T_{lm} sind Elemente zweier symmetrischer Matrizen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{T}$, mit deren Hilfe die Lagrangegleichungen geschrieben werden können als

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T})\mathbf{A} = 0, \qquad \text{mit Spaltenvektor} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{3n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Jede Frequenz ω_k gehört zu einem Vektor A_k; deshalb setzt sich die allgemeine Lösung (wie in Aufgabe 1) aus Linearkombinationen der individuellen Lösungen zusammen. Durch das Finden der Normalkoordinaten lässt sich das Problem erheblich vereinfachen. Falls $\mathbf{V}$ und $\mathbf{T}$ symmetrische, positiv-definite Matrizen mitt reelen Einträgen sind, lässt sich Gl. (4) diagonalisieren

$$(\mathbf{V}' - \omega^2 \mathbf{T}')\mathbf{A} = 0, \tag{5}$$

mit

$$(\mathbf{V}' - \omega^2 \mathbf{T}') = \begin{pmatrix} V'_{11} - \omega^2 T'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V'_{22} - \omega^2 T'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & V'_{22} - \omega^2 T'_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & V'_{3n,3n} - \omega^2 T'_{3n,3n} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Für jede Normalfrequenz ω_m gibt es eine Lösung der Form

$$\eta_l = C_m a_{lm} \cos(\omega_m t + \phi_m), \tag{7}$$

wobei C_m ein Skalierungsfaktor, a_{lm} der Koeffizient und Phasenwinkel ϕ_m. Die allgemeinste Lösung kann geschrieben werden als

$$\eta_l(t) = \sum_{m=1}^{3n} a_{lm}(A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t)), \tag{8}$$

mit $A_m = C_m \cos(\phi)$ und $B_m = -C_m \sin(\phi)$ (Sie können $\phi_m = \phi$ annehmen). Um die Konstanten in Gl. (8) zu berechnen, müssen zunächst die Normalschwingsfrequenzen ω_m aus der charakteristischen Gleichung

$$\det|V - \omega^2 T| = 0 \tag{9}$$

bestimmt werden. Dann müssen die ω^2 in

$$\sum_{l=1}^{3n} \left[V_{lm} - \omega^2 T_{lm}\right] a_{lm} = 0, \qquad m = 1, 2, ..., 3n \tag{10}$$

durch ω_m ersetzt werden und die $3n$ Lösungen a_{lm} für jedes m einzeln berechnet werden. Einer der Faktoren a_{lm} muss dabei der Wert "1ßugeordnet werden, da sonst nur die Quotienten der Koeffizienten berechnet werden. Schließlich lassen sich die Konstanten A_m und B_m aus den Anfangsbedingungen des Systems

$$\eta_l(0) \equiv \eta_{l0} = \sum_{m=1}^{3n} a_{lm} A_m \tag{11}$$

$$\dot{\eta}_l(0) \equiv \dot{\eta}_{l0} = \sum_{m=1}^{3n} a_{lm} \omega_m B_m \tag{12}$$

berechnen.

Wenden Sie obiges Verfahren an, um die Frequenzen für ein Doppelpendel unter Schwerkrafteinwirkung gemäß Abb. 2, wobei $l_1 = l_2 = l$ ist, zu berechnen. *(10.0 Punkte)*

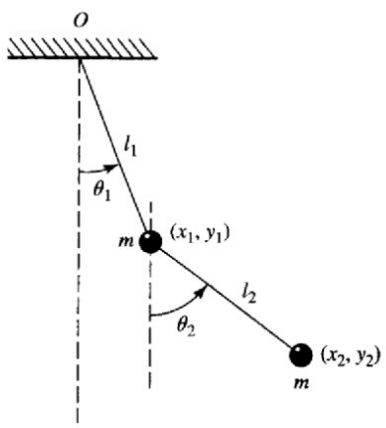

Abbildung 2: Doppelpendel