Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **21.11.2013**
Blatt VI **Fälligkeitsdatum 28.11.2013**

Übung 1 *Oberflächenladung*

a) In einem Metall schirmen in der statischen Situation Oberflächenladungen das elektrische Feld ab. Betrachten Sie ein infinitesimales Stück d^2r einer metallischen Oberfläche, die eine Oberflächenladungsdichte σ trägt. Zeigen Sie, dass an dieser Stelle

$$\sigma = \frac{1}{\epsilon_0}\hat{n} \cdot \vec{E}$$

gilt. Hier ist $\vec{E}$ das elektrische Feld außerhalb des Metalls und der Normaleneinheitsvektor zeigt auf die Vakuumseite der Oberfläche.
Anleitung: Legen Sie eine dünne „Schachtel" um d^2r und nutzen Sie den Satz von Gauß *(1 Punkt)*

b) Berechnen und plotten Sie die Oberflächenladungsdichte für den in der Vorlesung behandelten Fall einer Punktladung außerhalb einer geerdeten Kugel. *(2 Punkte)*

Übung 2 *Ladungsverteilung*

Ein homogen geladener Kreisring um den Ursprung vom Radius $r_1 > r_2$ befinde sich in der xy-Ebene außerhalb einer geerdeten Kugel vom Radius r_2. Berechnen Sie das Potenzial für $r > r_2$. Ihr Ergebnis wird eine Summe nichtverschwindender Terme sein, die Sie nicht geschlossen analytisch auswerten können. *(4 Punkte)*

Übung 3 *Greensfunktion*

a) Betrachten Sie ein allgemeines elektrostatisches Problem im Halbraum $z > 0$ mit Dirichlet Randbedingungen ($G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$) in der Ebene $z = 0$ und im Unendlichen. Finden Sie die entsprechende Dirichlet-Greensfunktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$.
Hinweis: Wählen Sie einen Ansatz mit dem Prinzip der Spiegelladungen *(2 Punkte)*

b) Nehmen Sie an, dass das Potenzial in der Ebene $z = 0$ als $V = V_0$ innerhalb eines Kreises vom Radius a um den Ursprung vorgegeben ist, und $V = 0$ außerhalb dieses Kreises. Leiten Sie einen Integralausdruck für das resultierende Potenzial an einem beliebigen Punkt in Zylinderkoordinaten her. *(1 Punkt)*

c) Zeigen Sie, dass entlang der z-Achse ($\rho = 0$) das Potenzial durch

$$V = V_0 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

gegeben ist. *(1 Punkt)*

Übung 4 *von-Neumann Randbedingungen*

Komplementär zum in der Vorlesung behandelten Dirichlet Randwertproblem wird im von-Neumann Problem das normale elektrische Feld auf der Oberfläche ∂V vorgegeben, also $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi$. Wir wollen hier die Unterschiede studieren.

a) In Analogie zum Dirichlet Problem könnten wir für die von-Neumann-Greensfunktion fordern, dass

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$$

auf der Oberfläche ist. Zeigen Sie durch Anwendung des Gaussschen Satzes, dass dies im Widerspruch zum Gaussschen Satz steht

(1 Punkt)

b) Wählen Sie stattdessen

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}' G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -1/S$$

auf der Oberfläche, wobei S die Fläche von ∂V ist. Zeigen Sie nun, dass

$$\phi(\vec{r}) - \phi_0 = \int_V d^3r' \; \rho(\vec{r}') G_n(\vec{r}, \vec{r}') + \epsilon_0 \oint_{\partial V} d^2r' \; G_N(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n} \cdot \vec{\nabla}\phi$$

ist. Welche Bedeutung hat ϕ_0. *(1 Punkt)*

c) Konstruieren Sie die von-Neumann-Greensfunktion außerhalb einer Kugel um den Ursprung vom Radius R *(2 Punkte)*