Lösung Beispielaufgabe 1: Diagonalisierung reeller 2×2 Matrizen [3]

(a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms liefern die Eigenwerte:

Char. Polynom: $$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(6-\lambda) + 12$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3}$.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2:$ $$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_1 \mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

$\lambda_2 = 3:$ $$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_2 \mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Explizit: Die beiden Reihen der Matrix $(A - \lambda_j \mathbb{1})$ sind proportional zueinander (wie erwartet, da die Determinante dieser Matrix gleich Null ist). Beide Reihen liefern somit dieselbe Information über den jeweiligen Eigenvektor $\mathbf{v}_j$. Für $\mathbf{v}_1 = (v^1_1, v^2_1)^T$ gilt $-3v^1_1 + 6v^2_1 = 0$, also hat er die Form $\mathbf{v}_1 = a_1(2,1)^T$. Analog findet man $\mathbf{v}_2 = a_2(3,2)^T$. Die Vorfaktoren a_1 und a_2 werden *nicht* durch die Eigenwertgleichung festgelegt, denn wenn $\mathbf{v}_j$ die Gleichung $(A - \lambda_j \mathbb{1})\mathbf{v}_j = 0$ erfüllt, gilt dasselbe für $a_j \mathbf{v}_j$, mit $a_j \in \mathbb{R}$. Falls Normierung der Eigenvektoren gewünscht ist, legt die Normierungsbedingung $\|\mathbf{v}_j\| = 1$ den Betrag der Vorfaktoren, $|a_j|$, fest. Das ist hier jedoch nicht der Fall, also wählen wir den Vorfaktor nach Belieben – hier $a_1 = a_2 = 1$.

Die diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation S enthält die Eigenvektoren als Spalten; ihre Inverse folgt über die Invertierungsformel für 2×2-Matrizen, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

Ähn-Tr.: $$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \quad S^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Check: $$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir finden die Eigenwerte über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

Char. Polynom: $$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} \frac{11}{5}-\lambda & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = (\tfrac{11}{5} - \lambda)(-\tfrac{1}{5} - \lambda) - \tfrac{64}{25}$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1}$.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 3:$ $$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_1 \mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_1 = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ |a_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

$\lambda_2 = -1:$ $$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_2 \mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ |a_2| = \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Explizit: Für den Eigenvektor $\mathbf{v}_1 = (v^1_1, v^2_1)^T$ gilt $-4v^1_1 - 8v^2_1 = 0$, also hat er die Form $\mathbf{v}_1 = a_1(2,-1)^T$. Analog findet man $\mathbf{v}_2 = a_2(1,2)^T$. In diesem Fall ist es ratsam, die Eigenvektoren zu durch $\|\mathbf{v}_j\| = 1$ normieren (siehe unten), was die Vorfaktoren bis auf ein Vorzeichen festlegt: $a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $a_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Wir wählen hier beide Vorzeichen positiv (eine andere Wahl wäre ebenso legitim).

Die diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation S enthält die Eigenvektoren als Spalten. Da die Matrix A *symmetrisch* ist, ist es möglich, diese Ähnlichkeitstransformation *orthogonal* zu wählen, sodass sie $S^{-1} = S^T$ erfüllt. Dazu müssen die Eigenvektoren ein ortho*normales* System bilden. Orthogonal sind sie bereits (für eine symmetrische Matrix sind Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal); da wir sie oben normiert haben, sind sie auch orthonormal.

Ähn-Tr.: $$S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}, \quad S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Check: $$S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Es ist natürlich auch möglich, aus nicht-normierten Eigenvektoren eine Ähnlichkeitstransformation $\tilde{S}$ zu konstruieren. Allerdings ist deren Inverse, $\tilde{S}^{-1}$, dann nicht durch $\tilde{S}^T$ gegeben, sondern muss in einem zusätzlichen Schritt mittels der entsprechenden Invertierungsformel bestimmt werden. Wählen wir z.B. die obigen Vorfaktoren als $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$, und nutzen $\tilde{\mathbf{v}}_1 = (2,-1)^T$ und $\tilde{\mathbf{v}}_2 = (2,4)^T$ als Eigenvektoren, erhalten wir:

Ähn-Tr.: $$\tilde{S} = (\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}, \quad \tilde{S}^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Da sich die Spalten von S und $\tilde{S}$, sowie die Reihen von S^{-1} und $\tilde{S}^{-1}$, nur um Vorfaktoren unterscheiden, funktioniert der Check hier analog wie oben:

Check: $$\tilde{S}^{-1}A\tilde{S} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Lösung Beispielaufgabe 2: Diagonalisierung einer Matrix, die eine Variable enthält [2]

Char. Poly.: $$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} x-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3-x & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (x-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (3-x) + (x-\lambda) - (3-\lambda)$$
$$= (x-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = x, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3}$; Eigenvektoren:

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_1 \mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3-x & -1 & 3-x \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{\text{Gauß}} \boxed{\mathbf{v}_1 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ |a_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_2 \mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3-x & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 \xrightarrow{\text{Gauß}} \boxed{\mathbf{v}_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-x \\ -1 \end{pmatrix}, \ |a_2| = \frac{1}{\sqrt{6-4x+x^2}}}$$

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_3 \mathbb{1})\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3-x & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}_3 \xrightarrow{\text{Gauß}} \boxed{\mathbf{v}_3 = a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3-x \\ 2-x \end{pmatrix}, \ |a_3| = \frac{1}{\sqrt{14-10x+2x^2}}}$$