Theoretische Physik I/II

WS 2016/17 **06.01.2017**
Übungsblatt VIII **Abgabedatum 13.01.2017**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre

Aufgabe 1 *Trägheitstensor I*

Gegeben sei ein homogener Kubus mit Dichte ρ, Masse M und Kantenlänge L. Der Ursprung des Koordinatensystems sei an einer der Ecken des Würfels gewählt, der Würfel selbst solle sich im rein positiven Quadranten des Koordinatensystems befinden (d.h. Kanten entlang positiver x,y und z-Achse). L bezeichne die Kantenlänge.

a) Bestimmen Sie alle Einträge des Trägheitstensors $\mathbf{\Theta}$ mit Komponenten

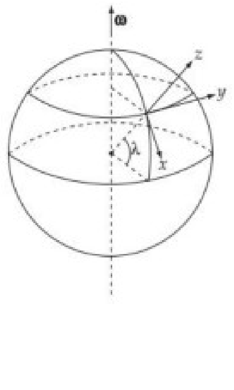
$$\Theta_{k,l} = \int\int\int \rho(r) \left(\delta_{k,l} \sum_i x_i^2 - x_k x_l \right) dxdydz. \tag{1}$$

(2.0 Punkte)

b) Finden Sie die Hauptachsen und die zugehörigen Trägheitsmomente (Hinweis: mind. einer der Eigenwerte beträgt 11/12). *(2.0 Punkte)*

Aufgabe 2 *Projektil*

Zeigen Sie, dass ein vertikal auf eine Höhe h überhalb der Erdoberfläche in die Luft geschossenes Projektil bei nördlichem Breitengrad λ an einem Punkt $\frac{4}{3}\omega\cos(\lambda)\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$ westlich aufschlägt (ω is die Kreisfrequenz der Erdrehung).



(4.0 Punkte)

Aufgabe 3 *Trägheitstensor II*

Betrachten Sie eine dünne Platte (Dicke also vernachlässigbar) homogener Massendichte, welche sich in der $x-y$-Ebene befindet.

a) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ die folgende Form besitzt

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei A, B, C Konstanten sind. *(2.0 Punkte)*

b) Falls die Koordinatenachsen um die z-Achse um einen Winkel θ rotiert werden, zeigen Sie dass der Trägheittensor dann folgende Gestalt annimmt

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} A' & -C' & 0 \\ -C' & B' & 0 \\ 0 & 0 & A'+B' \end{pmatrix}, \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} A' =& A\cos^2(\theta) - C\sin(2\theta) + B\sin^2(\theta) \\ B' =& A\sin^2(\theta) + C\sin(2\theta) + B\cos^2(\theta) \\ C' =& C\cos(2\theta) - \frac{1}{2}(B-A)\sin(2\theta). \end{aligned} \tag{4}$$

(2.0 Punkte)

c) Für welche Wahl von θ werden die x- und y-Achse Hauptachsen? *(1 Punkt)*

Aufgabe 4 *Kreisel und Eulerwinkel*

Wir betrachten einen mit ω rotierenden symmetrischen Kreisel der Masse M, dessen untere Spitze mit dem Boden fest verbunden ist (Abstand Schwerpunkt-Boden sei h). Der Koordinatenursprung des Laborsystems (x'_1, x'_2, x'_3) falle mit der Kreiselspitze zusammen (siehe Abbildung). Das Körperfeste Bezugssystem sei durch (x_1, x_2, x_3) gekennzeichnet. Die Winkel (ϕ, θ, ψ) kennzeichnen die Eulerwinkel. Die Komponenten von ω können durch diese wie folgt ausgedrückt werden

$$\omega_1 = \dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\psi) + \dot{\theta}\cos(\psi) \tag{5}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\psi) - \dot{\theta}\sin(\psi) \tag{6}$$

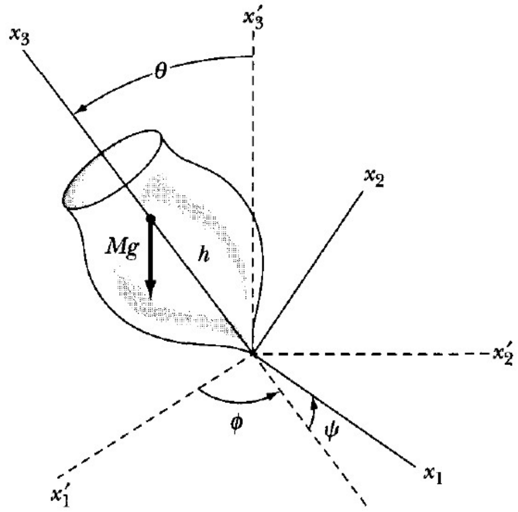
$$\omega_3 = \dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi}. \tag{7}$$

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Lagrangefunktion geschrieben werden kann als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Theta_{11}(\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}\Theta_{33}(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2 - Mgh\cos(\theta), \tag{8}$$

wobei Θ_{11} und Θ_{33} zwei Hauptträgheitsachsen des Kreisels sind. *(2.5 Punkte)*

b) Welche Erhaltungsgrößen lassen sich aus $\mathcal{L}$ direkt ablesen? Geben Sie sie an. *(2.0 Punkte)*



c) Bei unserem System handelt es sich um ein konservatives System, d.h. dass die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ erhalten ist. Zeigen Sie, dass E geschrieben werden kann als

$$E = \frac{1}{2}\Theta_{11}(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}\Theta_{33}\omega_3^2 + Mgh\cos(\theta). \tag{9}$$

(1 Punkt)

d) Nutzen Sie $p_\phi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ und $p_\psi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}$ um zu zeigen, dass man die Zeit in Abhängigkeit des Winkels θ berechnen kann durch

$$t(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/\Theta_{11})(E' - V(\theta))}}, \tag{10}$$

wobei $E' = E - \frac{1}{2}\Theta_{33}\omega_3^2$ und

$$V(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi\cos(\theta))^2}{2\Theta_{11}\sin^2(\theta)} + Mgh\cos(\theta). \tag{11}$$

Dieses Integral lässt sich (formal zumindest) invertieren um einen Ausdruck für $\Theta(t)$ zu bekommen, welches wiederum erlaubt einen Ausdruck für $\phi(t)$ und $\psi(t)$ zu erhalten. *(4.5 Punkte)*