Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **5.12.2013**
Blatt VIII **Fälligkeitsdatum 12.12.2013**

Übung 1 *Ebene Wellen: Mengenartige Größen*

Betrachten Sie eine geladene Kugelschale mit Radius a und Gesamtladung q, die um eine beliebige Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.

a) In Blatt 2, Aufgabe 2 haben Sie bereits Poynting-Vektor und Energiedichte für eine linear polarisierte ebene Welle ausgerechnet. Berechnen Sie noch deren zeitliches Mittel. Argumentieren Sie, dass die ebene Welle Energie mit Lichtgeschwindigkeit transportiert und damit, dass Photonen bereits aus klassischen Überlegungen heraus masselos sind. *(1 Punkt)*

b) Ähnlich wie im Fall des Impulses können wir für das elektromagnetische Feld auch eine Drehimpulsdichte definieren. Sie hat zwei Beiträge, den Spin

$$\vec{s} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{A}$$

und den Bahndrehimpuls

$$\vec{\ell} = \epsilon_0 \sum_{l=1}^{3} E_l (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_l$$

Betrachten Sie eine rechtszirkular polarisierte ebene Welle und nutzen Sie das Vektorpotenzial in der Weyleichung ($\phi = 0$). Berechnen Sie $\vec{s}$ und $\vec{l}$. Bilden Sie das Verhältnis von $\vec{s}$ zur Energiedichte und argumentieren Sie, dass Photonen Teilchen mit Spin 1 sind. *(2 Punkte)*

c) Betrachten Sie eine TE-Mode (erreicht durch $m = 0$) in einem rechteckigen Wellenleiter. Berechnen Sie hier den Poynting-Vektor. Vergleichen Sie das zeitabhängige mit dem zeitlich gemittelten Ergebnis und beschreiben Sie so den Energietransport in dem Leiter *(2 Punkte)*

Übung 2 *Wellenpakete*

Aufgrund der Linearität der Wellengleichung sind Wellenpakete ebenfalls Lösungen. Wir beschränken uns hier auf dein eindimensionalen Fall. Hier haben Wellenpakete die Form

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \ \left[a(k) e^{i\omega t} + a^*(k) e^{-i\omega t} \right] e^{ikz}$$

a) Zeigen Sie, dass dies eine Lösung der Wellengleichung ist, die sich in der Form $\phi = f_+(x - ct) + f_-(x + ct)$ schreiben lässt, wenn $\omega = \pm ck$. *(1 Punkt)*

b) Plotten Sie den Absolutwert der Lösung zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit $t = 2/c\sigma$ für i) $A(k) = \Theta(\sigma - k)\Theta(k + \sigma)$ (Heavisidefunktion) und ii) $A(k) = e^{-k^2\sigma^2}$. *(2 Punkte)*

Übung 3 *Polarisierte Welle und Stokes-Parameter*

a) Eine allgemeine Lösung einer sich in z-Richtung ausbreitenden ebenen Welle lässt sich durch eine Linearkombination von rechts- und linkszirkular-polarisiertem Licht charakterisieren. Es bezeichnen E_+ und E_- die komplexen Amplituden der rechts- und linkszirkularen Komponenten. Zeigen Sie, dass der Vektor des elektrischen Feldes eine Ellipsenbahn in der xy-Ebene beschreibt, falls die Phasendifferenz zwischen den Komponenten $E_-/E_+ = re^{i\alpha}$ beträgt. *(2 Punkte)*

b) Die Polarisation des Feldes kann durch die Stokes-Parameter I, Q, U und V ausgedrückt werden. Bezüglich der x und y-Komponenten des Feldes lautet deren Definition

$$\begin{aligned} I &= |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ Q &= |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ U &= 2Re(E_x E_y^*) \\ V &= -2Im(E_x E_y^*)\,. \end{aligned}$$

Der Stokes-Vektor (I, Q, U, V) wird häufig in der Optik verwendet um inkohärentes oder partiell polarisiertes Licht zu beschreiben, da er experimentell durch einfache Messung der Feldintensität für unterschiedliche Basen vollständig bestimmt werden kann. Berechnen Sie die Stokes-Parameter bezüglich der Feldkomponenten der rechts- und linkszirkular-polarisierten Basis und der durch die Hauptachsen der Ellipse definierten Basis. Zeigen Sie, dass alle Stokes-Parameter durch Messung der Intensität (also der Energiedichte) bestimmt werden können. *(2 Punkte)*

Übung 4 *Hohlraumresonator*

Betrachten Sie den Hohlraumresonator der durch Abschluss der beiden Enden eines rechteckigen Wellenleiters mit Kantenlängen a und b bei $z = 0$ und $z = d$ durch perfekt leitende Wände entsteht. Zeigen Sie, dass die Resonanzfrequenzen für TE und TM-Moden durch

$$\omega_{lmn} = c\pi\sqrt{(l/d)^2 + (m/a)^2 + (n/b)^2}$$

gegeben sind, wobei a und b die Längen der Seitenwände des Resonators bezeichnen und l, m und n ganze Zahlen sind. Bestimmen Sie die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder. *(4 Punkte)*