Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **12.12.2013**
Blatt IX **Fälligkeitsdatum 19.12.2013**

Übung 1 *Glättungsstrategien*

Wir vergleichen verschiedene Methoden zur Glättung einer oszillierenden Ladungsdichte. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf eine Dimension.

a) Wir benutzen Glättungsfunktionen $w_1(x) = a_1 \Theta(b - |x|)$ und $w_2(x) = a_2 e^{-x^2/b^2}$. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstanten a_1 und a_2. *(1 Punkt)*

b) Wir betrachten die Ladungsdichte $\rho(x) = \rho_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(x-n)^2}{a^2}\right)$. Berechnen Sie die mit w_1 und w_2 geglättete Funktion (in einem Fall beinhaltet Ihr Ausdruck die Fehlerfunktion). Plotten Sie ρ und die beiden geglätteten Funktionen für den Fall $a = 0.5$ und $b = 2.75$ mithilfe eines Computers. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis *(2 Punkte)*

Übung 2 *Wellengleichung in Metallen*

Wir betrachten die Wellenausbreitung in Metallen. Hier gilt das Ohmsche Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ wobei σ die Leitfähigkeit ist.

a) Folgen Sie den Schritten der Herleitung der Wellengleichung aus den Maxwellgleichungen, um eine effektive Wellengleichung für das Elektrische Feld im Metall herzuleiten. Das Ergebnis heißt Telegrafengleichung. *(1 Punkt)*

b) Machen Sie einen Lösungsansatz mittels monochromatischen ebenen Wellen und bestimmen Sie Dispersionsrelation und Felder. Berechnen Sie für den Fall einer linear polarisierten Welle den Poyntingvektor und sein Energiemittel. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis, insbesondere die Spezialfälle großer und kleiner Leitfähigkeit. *(2 Punkte)*

c) Wir gehen jetzt in das hochfrequente Regime. Dort folgen die Leitungselektronen in einem Metall nicht dem frequenzabhängigen Ohmschen Gesetz, sondern der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\dot{\vec{v}} = -e\vec{E}$. Leiten Sie daraus eine frequenzabhängige Leitfähigkeit her. Diskutieren Sie, unter welchen Bedingungen es propagierende Moden gibt. Erklären Sie damit den Glanz von Metallen. *(2 Punkte)*

Übung 3 *Pulsverbreiterung in dispersiven Medien*

Betrachten Sie den eindimensionalen, elektromagnetischen Puls mit anfänglicher Form einer Gaußglocke

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}L} e^{-x^2/(2L^2)}, \tag{1}$$

welcher sich in einem dispersiven Medium ausbreitet. Entwickeln Sie die Frequenz $\omega(k)$ um k_0 und behalten Sie Terme bis zu zweiter Ordnung in k_0. Zeigen Sie so, dass sich der ursprüngliche Puls verbreitert. *(2 Punkte)*

Übung 4 *Links-Händige Medien*

Ein interessanter Aspekt der Elektrodynamik in Medien ist, dass es häufig möglich ist die dielektrischen Eigenschaften der Medien, mittels eines LC-Netzwerks, zu modellieren und somit Wellenausbreitungen zu studieren. Betrachten Sie beispielsweise ein 2D Netzwerk mit der Einheitszelle wie in Abb. 1, wobei Z die Impedanz und Y die Admittanz eines beliebigen Elements des Schaltkreises beschreiben.

a) Dem Ohmschen Gesetz zufolge, ist die Spannungsdifferenz über einem Element des Schaltkreises gleich dessen Impedanz multipliziert mit dem hindurchfließendem Strom. Berechnet man den Grenzfall, bei dem die Größe des Schaltkreiselements in x- und z-Richtung gegen Null gehen, so findet man eine differentielle Form des Ohmschen Gesetzes. Zusätzlich besagen die Kirchhoffschen Regeln, dass sich in den Knoten des Schaltkreises kein Strom akkumulieren kann. Benutzen Sie dies um zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{\partial i_z}{\partial z} + \frac{\partial i_x}{\partial x} = -v_y Y. \tag{2}$$

Diese Gleichungen sind die sogenannten Telegraphengleichungen für unser Netzwerk. Kombinieren Sie die von Ihnen gefundenen Gleichungen, um eine Wellengleichung für v_y zu erhalten. *(1 Punkt)*

b) Betrachten Sie nun eine TM Lösung (y-Richtung) der Maxwellgleichungen für ein dünnes, homogenes, isotropes Medium. Für diesen dünnen Film nehmen wir schwache Variationen der Felder in transversaler Richtung an, in dem Sinne, dass Ableitungen verschwinden. Geben Sie die explizite Form der x- und z-Komponenten des Farday-Gesetzes an, sowie die y-Komponente des Ampereschen Gesetzes. *(1 Punkt)*

c) Vergleicht man die oben gefundenen Gleichungen so erkennt man, dass das verteilte Netzwerk (distributed network) die Feldgleichungen abbildet, wobei die Permittivität und die Permeabilität von Y und Z abhängen. Zeigen Sie, dass man für $Z = i\omega L$ (Impedanz einer Spule) und $Y = i\omega C$ (Admittanz eines Kondensators) und $L = \mu_0$, $C = \epsilon_0$ die Maxwell Gleichungen im Vakuum erhält. Berechnen Sie die Fortpflanzungskonstante, sowie die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit und den Brechungsindex $n = \frac{c}{v_{\mathrm{Phase}}}$. *(2 Punkte)*

d) Wir wollen nun die Rollen der Kapazitäten und Induktivitäten vertauschen und $Z = (i\omega C')^{-1}$ und $Y = (i\omega L')^{-1}$ definieren. Was sind Permittivität und Permeabilität des entsprechenden Mediums? Beachten Sie dabei, dass nun beide negativ sind. Berechnen Sie auch hier Fortpflanzungskonstante (propagation constant), Guppen- und Phasengeschwindigkeit. Im Gegensatz zum vorherigen Fall haben Gruppen- und Phasengeschwindigkeit nun unterschiedliche Vorzeichen. Was ist der korrespondierende Brechungsindex? Beachten Sie, dass auch dieser nun negativ ist. Das verteilte Netzwerk, welches wir hier untersucht haben, beschreibt ein Medium mit negativem Brechungsindex. Diese werden "linkshändige Medien" (left-handed media) genannt, für welche, aufgrund des negativen Brechungsindexes, der Wellenvektor antiparallel zum Poyntingvektor steht und sich durch das elektrische und magnetische Feld mittels einer "Linken-Hand-Regel" bestimmt.

(2 Punkte)

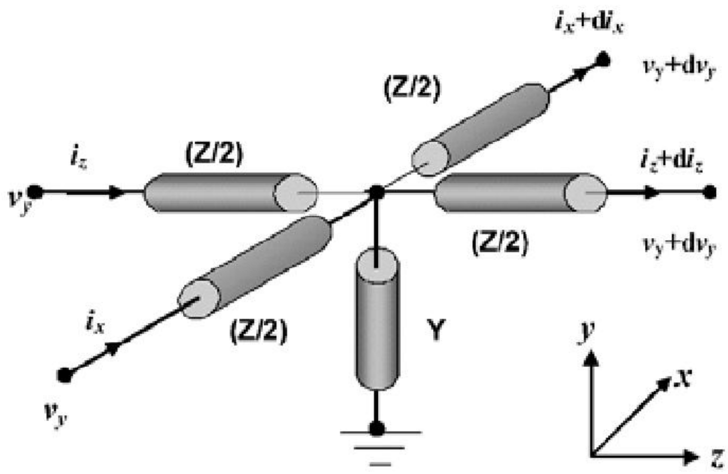

Bild 1