Theoretische Physik II

WS 2013-2014 **24.10.2013**
Blatt II **Fälligkeitsdatum 31.10.2013**

Übung 1 *Ladungsverteilungen*

a) In Kugelkoordinaten lautet das dreidimensionale Diracdelta

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')\,. \tag{1}$$

Zeige dies explizit, indem Du in einem Integral mit einer Testfunktion geeignet substituierst. *(1 Punkt)*

b) Gebe so die Ladungsdichte einer homogen geladenen Kugelschale vom Radius R mit Gesamtladung an. *(1 Punkt)*

c) Jetzt setzen wir die Kugel in eine Drehbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Gib für die Punkte auf der Oberfläche den Geschwindigkeitsvektor an. Wie lautet die resultierende Stromverteilung? *(1 Punkt)*

Übung 2 *Energie- und Impulsstrom*

Berechne die Energiedichte, den Poyntingvektor und den Maxwellschen Spannungstensor für folgende Felder

a) das Coulombfeld

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{B} = 0\,, \tag{2}$$

(1 Punkt)

b) eine linear in x-Richtung polarisierte ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet

$$\vec{E} = E_0\hat{e}_x\cos(kz-\omega t) \qquad \vec{B} = -\hat{e}_y E_0\frac{k}{\omega}\cos(kz-\omega t)\,, \tag{3}$$

(1 Punkt)

c) eine Kugelwelle

$$\vec{E} = \hat{e}_\theta\frac{E_0}{r}\cos(kr-\omega t) \qquad \vec{B} = \hat{e}_\phi\frac{E_0}{r}\frac{k}{\omega}\cos(kr-\omega t)\,. \tag{4}$$

Beschränke dich hier beim Maxwellschen Spannungstensor auf T_{xx} und T_{xy}. *(2 Punkte)*

Übung 3 *Eichtransformationen*

a) Zeige, dass die Euler-Lagrange Gleichungen eines Systems der klassischen Mechanik von der Folgenden Transformation der Lagrangefunktion unbeeinflusst bleiben

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt}\frac{e}{c}\lambda(\vec{q}, t)\,, \tag{5}$$

wobei der Faktor e/c der künftigen Zweckmäßigkeit wegen eingeführt wurde, mit der Elementarladung e und der Lichtgeschwindigkeit c. *(2 Punkte)*

b) Die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens, das sich in einem elektromagnetischen Feld bewegt, lautet

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^{\,2} - eV(\vec{q}, t) + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{q}, t) \cdot \dot{\vec{q}}\,. \tag{6}$$

Zeige, dass die Transformation aus Teil a) äquivalent ist zur Eichtransformation

$$\vec{A}'(\vec{q}, t) = \vec{A}(\vec{q}, t) + \nabla\lambda(\vec{q}, t) \tag{7}$$

$$V'(\vec{q}, t) = V(\vec{q}, t) - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\lambda(\vec{q}, t)\,. \tag{8}$$

(2 Punkte)

Übung 4 *Von der Lorentzeichung zur Coulombeichung*

a) Wie später gezeigt wird besitzen die Wellengleichungen für Skalar- und Vektorpotenzial in der Lorentzeichung die Lösungen

$$\Phi_L(\vec{q}, t) = \textstyle\int d^3q' \frac{1}{R}\left[\rho(\vec{q}\,', t' = t - R/c)\right] \tag{9}$$

$$\vec{A}_L(\vec{q}, t) = \tfrac{1}{c}\textstyle\int d^3q' \frac{1}{R}\left[\vec{J}(\vec{q}\,', t' = t - R/c)\right]\,, \tag{10}$$

mit $R = |\vec{q} - \vec{q}\,'|$, der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\vec{J}$. Da das skalare Feld in der Coulombeichung die Form

$$\Phi_C(\vec{q}, t) = \int d^3q' \frac{1}{R}\left[\rho(\vec{q}\,', t)\right] \tag{11}$$

annimmt, soll die Eichtransformation von der Lorentz- zur Coulombeichung bestimmt werden, sowie die Lösung des Vektorpotenzials in der Coulombeichung.

Um dies zu erreichen, zeige zunächst, beginnend mit der Lösung für das skalare Feld, dass die mit der Transformation verknüpfte Eichfunktion geschrieben werden kann als

$$\chi(\vec{q}, t) = -c\int d^3q' \frac{1}{R}\int_0^{R/c} d\tau\rho(\vec{q}\,', t - \tau) + \chi_0\,, \tag{12}$$

mit $\chi_0 = \chi(\vec{q}, 0)$. *(2 Punkte)*

b) Finde unter Verwendung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ die Wellengleichung von χ (also eine parzielle Differenzialgleichung, die χ erfüllen muss). Mache dabei geltend, dass χ_0 bestenfalls eine Konstante sein kann. *(1 Punkt)*

c) Berechne den Gradienten von χ um die Lösung für das Vektorpotenzial in der Coulombeichung zu finden.
Hinweis: Verwende den zweiten Hauptsatz der Analysis. *(1 Punkt)*