Theoretische Physik 1+2 LAG
Präsenzblatt 1

Dr. Ferdi Schank
Susanna Kirchhoff
Nicolas Wittler
Yanjun Ji

WS 19/20 **24.10./25.10.**

Info: *Dieses Präsenzblatt wird in den Übungsgruppen am 24.10. bzw. 25.10. besprochen.*

Aufgabe 1: Zylinderkoordinaten

Berechnen Sie folgende Größen in Zylinderkoordinaten:

(a) Ortsvektor $\vec{r}$

(b) Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$

(c) Ableitung der Einheitsvektoren $\dot{\vec{e}}_\rho$, $\dot{\vec{e}}_\phi$, $\dot{\vec{e}}_z$

(d) Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

(e) Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$

Aufgabe 2: Zweites Keplersches Gesetz

(a) Wir betrachten zunächst den Drehimpuls.

  (i) Leiten Sie aus dem zweiten Newtonschen Axiom einen Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Drehmoment her.

  (ii) Wann ist der Drehimpuls erhalten?

(b) Nun betrachten wir ein Teilchen in einem Zentralpotenzial.

  (i) Das eigentlich dreidimensionale Problem kann auf zwei Dimensionen reduziert werden. Warum?

  (ii) Drücken Sie den Drehimpuls in Zylinderkoordinaten aus.

  (iii) Drücken Sie die in einem Zeitraum überstrichene Fläche in Zylinderkoordinaten aus.

  (iv) Vergleichen Sie!

Aufgabe 3: Euler-Lagrange-Gleichung

Für einen Satz Koordinaten $\vec{q}(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}(t)$ sei eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}\left[\vec{q}(t)\right] \equiv \mathcal{L}\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(t), t\right)$ gegeben.

(a) Geben Sie die Definition der Wirkung S an.

(b) Berechnen Sie die Variation der Lagrange-Funktion als Funktional von $\vec{q}(t)$.

(c) Zeigen Sie, dass aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung $\delta S = 0$ die Euler-Lagrange-Gleichung folgt.

(d) Identifizieren Sie die Euler-Lagrange-Gleichung mit dem zweiten Newtonschen Axiom, indem Sie den Zusammenhang zwischen Kraft und Impuls und den Ableitungen der Lagrange-Funktion angeben.

Aufgabe 4: Das Brachistochronen-Problem

Ein Teilchen mit Masse m bewege sich auf einer Schiene unter dem Einfluss der Gravitation reibungsfrei von Punkt $(0, 0)$ nach (x_1, y_1). Die Anfangsgeschwindigkeit sei Null. Wir möchten die Form der Schiene nun so bestimmen, dass das Teilchen schnellst möglich das Ende erreicht.

(a) Nutzen Sie die Definition der Momentangeschwindigkeit $|\vec{v}| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ um die Gesamtlaufzeit des Teilchens T als Integral über den Weg s auszudrücken.

(b) Schreiben Sie die Zeit $T[y(x)]$ als Funktional über die Form der Schiene $y(x)$, indem Sie mithilfe der Energieerhaltung die Geschwindigkeit durch die Höhe y ersetzen.

(c) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion die Form

$$\mathcal{L}(y, y', x) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}}$$

besitzt und bestimmen Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Differentialgleichung der Schiene $y(x)$.

Bemerkung: Die Lösung dieser DGL ist die sogenannte Brachistochrone.