Theoretische Physik 1+2 LAG
Präsenzblatt 2

Dr. Ferdi Schank
Susanna Kirchhoff
Nicolas Wittler
Yanjun Ji

WS 19/20 **31.10.**

Info: *Dieses Präsenzblatt wird in der Übungsgruppe am 31.10. besprochen.*

Aufgabe 1: Erhaltungssätze

(a) Wir betrachten eine Verschiebung $q' = q + \varepsilon$. Zeigen Sie, dass aus der Invarianz der Lagrange-Funktion die Erhaltung des zugeordneten Impulses folgt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \text{const.}$$

(b) Wir betrachten eine Rotation $\vec{q'} = \vec{q} + (\vec{n} \times \vec{q})\varepsilon$. Zeigen Sie, dass aus der Invarianz der Lagrange-Funktion die Erhaltung des zugeordneten Drehimpulses folgt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{L} = \vec{q} \times \vec{p} = \text{const.}$$

(c) Zeigen Sie, dass für eine nicht explizit zeitabhängige Lagrange-Funktion die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}\dot{\vec{q}} - \mathcal{L}$$

eine Erhaltungsgröße darstellt.

Aufgabe 2: Invarianz der Lagrange-Funktion

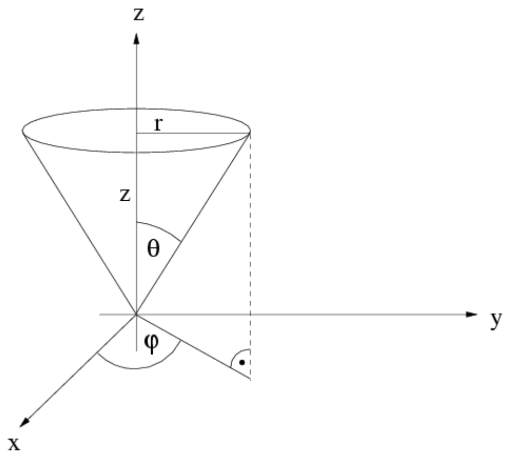
Betrachten Sie zwei Lagrange-Funktionen, die sich von einander durch eine Funktion $u(\vec{q}, t)$ unterscheiden, d.h.

$$\mathcal{L}'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + u(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\,.$$

Welche Bedingung muss an $u(\vec{q}, t)$ gestellt werden, damit $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ die gleiche Dynamik liefern, also die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für beide gleich ist?

Aufgabe 3: Massenpunkt auf Kegelmantel

Wir betrachten einen Massenpunkt auf einem Kegelmantel mit halben Öffnungswinkel θ (siehe Abbildung) im homogenen Schwerefeld der Erde.



(a) Was sind die Koordinaten des Massenpunktes in den eingezeichneten Koordinaten?

(b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion.

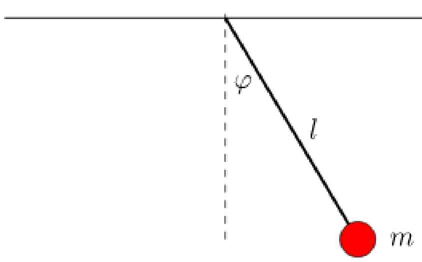
(c) Welche räumliche Symmetrie hat die Lagrangefunktion?

(d) Welche Erhaltungsgröße folgt aus der Symmetrie? Was nutzt Ihnen die Erhaltungsgröße?

(e) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

Aufgabe 4: Pendel

Ein ebenes Pendel der Masse m hängt an einer starren, masslosen Stange der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde (siehe Abbildung). Das Pendel kann nur in der Ebene schwingen, die durch diese Achse und die Richtung des Erdschwerefeldes aufgespannt ist. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion des Systems in geeigneten Koordinaten.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.