Einführung in die Quanteninformation
Übungsblatt 2

Dr. Michael Marthaler
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2017 **24.05.2016**

1. Die Quanten-Fourier-Transformation **(20 Punkte)**

Die Quanten-Fourier-Transformation kann definiert werden als

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle \ , \ \hat{F}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle \ , \ y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left[\frac{2\pi i}{N} k\, j\right] x_j \ , \quad (1)$$

mit dem Operator $\hat{F} = \sum_{j,k=0}^{N-1} \frac{e^{\frac{2\pi i}{N} jk}}{\sqrt{N}} |k\rangle\langle j|$. Der Zustand $|j\rangle$ ist ein Multi-Qubit Zustand,

$$|j\rangle = |j_1 j_2 j_3 \dots j_n\rangle = |j_1\rangle|j_2\rangle|j_3\rangle \dots |j_n\rangle \ , \ j = j_1 2^{n-1} + \dots j_n 2^0 \ , \quad (2)$$

mit $j_l = 0, 1$. Daraus folgt, dass j Werte annehmen kann von $j = 0$ bis $j = 2^n - 1$ ($N = 2^n$). Die Zustände $|j_l\rangle$ sind die Zustände der Qubits, aus denen unser Quantencomputer aufgebaut ist. Wenn wir für die einzelnen Zustände $|j_l\rangle$ Werte einsetzen schreiben wir immer $|0\rangle_l$ oder $|1\rangle_l$. Für den Zustand $|k\rangle$ gilt dasselbe, wobei er ein Produktzustand aus den Zuständen $|k_l\rangle$ ($l = 1 \dots n$) ist und k_l wiederum 0 oder 1 sein kann. Der Algorithmus, den wir suchen, ist aufgebaut aus den Gattern

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{2^k}} \end{pmatrix} \ , \quad (3)$$

wobei gilt

$$\mathbf{H}|0\rangle_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_l + |1\rangle_l) \ , \ \mathbf{H}|1\rangle_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_l - |1\rangle_l) \ , \ \mathbf{R}_k|0\rangle_l = |0\rangle_l \ \ \mathbf{R}_k|1\rangle_l = e^{\frac{2\pi i}{2^k}} |1\rangle_l \, . \quad (4)$$

$\mathbf{H}$ ist das Hadamard-Gatter, $\mathbf{R}_k$ das Phasenshiftgatter.

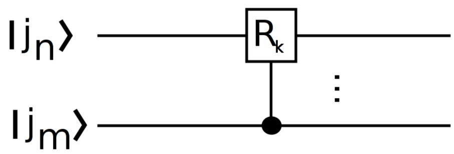

Abbildung 1: Schematische Zeichnung des kontrollierten Phasengatters. $|j_n\rangle$ ist hierbei der Ziel-Qubit und $|j_m\rangle$ der Kontroll-Qubit.

Das Phasenshiftgatter wird in unserem Algorithmus immer als kontrolliertes Phasengatter benutzt, dargestellt durch das Schaltbild 1. Das kontrollierte Phasengater wird dann auf den Ziel Qubit angewandt, wenn der Kontroll-Qubit im Zustand $|1\rangle$ ist. Für Abbildung 1 bedeutet das

$$\begin{aligned} R_k|0_n\rangle|0_m\rangle &= |0_n\rangle|0_m\rangle \ , \ R_k|1_n\rangle|0_m\rangle = |1_n\rangle|0_m\rangle \ , \\ R_k|0_n\rangle|1_m\rangle &= |0_n\rangle|1_m\rangle \ , \ R_k|1_n\rangle|1_m\rangle = e^{\frac{2\pi i}{2^k}} |1_n\rangle|1_m\rangle \, . \end{aligned} \quad (5)$$

(a) **(2 Punkte)** Zeigen sie das $\hat{F}$ unitär ist.

(b) **(3 Punkte)** Wir fangen an den Algorithmus zu suchen der folgende Transformation durchführt:

$$\hat{F}_j|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[\frac{2\pi i}{N} jk\right] |k\rangle \, . \quad (6)$$

Zeigen sie dazu das gilt

$$\hat{F}_j|j\rangle = 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle_l + \exp(\frac{2\pi i}{2^l} j)|1\rangle_l\right] \, . \quad (7)$$

(c) (2 Punkte) Zeigen sie nun das gilt

$$\exp\left[\frac{2\pi i}{2^l} j\right] = \exp\left[2\pi i \sum_{k=1}^{l} j_{n-l+k} 2^{-k}\right] . \tag{8}$$

Benutzen die dazu die Definition von j, gegeben durch die Gleichung (2).

(d) (2 Punkte) Zeigen sie das gilt

$$\mathbf{H}|j_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_k + e^{\frac{2\pi i}{2} j_k}|1\rangle_k\right) \tag{9}$$

(e) (4 Punkte) Wir wenden nun ein Hadamard-Gatter auf den ersten Qubit an und dann ein kontrolliertes Phasengatter mit allen folgenden Qubits (siehe Abbildung 2). Zeigen sie, dass dieser Algorithmus folgende Transformation durchführt

$$|j_1 j_2 \ldots j_n\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n} j_m 2^{-m}}|1\rangle_1\right)|j_2 j_3 \ldots j_n\rangle \tag{10}$$

Benutzen sie dazu das Ergebnis aus Aufgabenteil d).

(f) (4 Punkte) Derselbe Algorithmus wie in Aufgabenteil e) wird nun immer wieder auf einen Qubit nach dem anderen, wie schematisch gezeigt in Abbildung 3, angewandt. Danach wird die Nummerierung der Qubits umgekehrt. Zeigen sie das dies gerade dem Operator $\hat{F}_j$ entspricht. Benutzen sie dazu Aufgabenteil b), c) und e).

(g) (2 Punkte) Warum entspricht der Algorithmus der in Abbildung 3 gezeigt ist nicht nur dem Operator $\hat{F}_j$ sondern gleich auch dem Operator $\hat{F}$ und damit der Quanten-Fourier-Transformation, die wir gesucht haben?

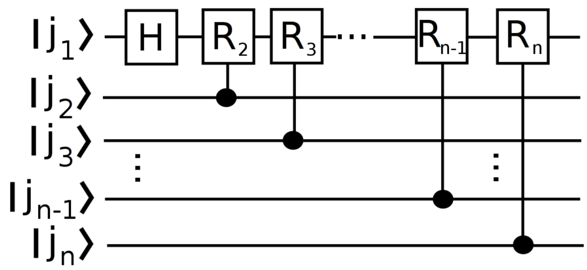

Abbildung 2: Der erste Teil der Quantum Fourier Transformation. Zuerst wird ein Hadamar Gate auf den ersten Qubit angewandt, und dann wird ein Controlled Phase Gate zwischen dem ersten und allen anderen Qubits verwendet.

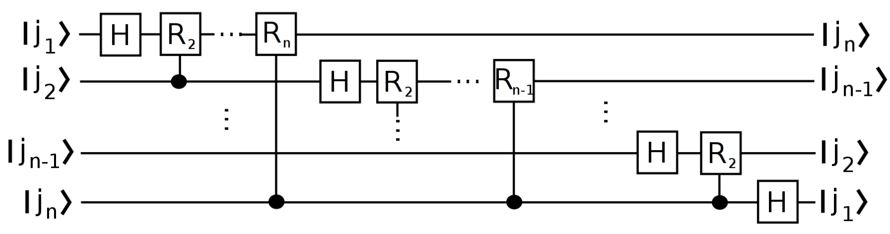

Abbildung 3: Die Vollständige Quanten Fourier Transformation.