

Einführung in die Quanteninformaton

Übungsblatt 3

Dr. Michael Marthaler
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2017

07.06.2017

1. Erzeugung eines Zustandes

12 Punkte

Wie in der Vorlesung besprochen, wollen wir einen Zustand $|\Psi_m\rangle = \sum_{i=0}^{2^m-1} \sqrt{p_i^{(m)}} |i\rangle$ initialisieren, wobei m die Anzahl der von uns verwendeten Qubits ist und die $p_i^{(m)}$ gegeben sind durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$. Dies beruht auf dem Paper von Lov Grover und Terry Rudolph von 2002 (arXiv:quant-ph/0208112v1). Wir nehmen an das $p(x)$ auf den Bereich 0 bis x_T beschränkt ist. Die $p_i^{(m)}$ sind Abhängig von der Anzahl der Unterteilungen des Bereichs 0 bis x_T , welche wiederum durch die Anzahl der verwendeten Qubits gegeben ist. Der Index i gibt an in welchem Teil der Unterteilung man sich befindet. Um einen endgültigen gewünschten Superpositionszustand aus N Qubits zu erreichen wird nun iterativ der gewünschte Endzustand aufgebaut, $m = 1, 2, \dots, N$. Dabei wird dir Größe $f^{(m)}(i)$ nützlich sein, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, sich in der linken Hälfte des Teilstück i zu befinden, wobei x_L^i die linke und x_R^i die rechte Regionsgrenze bilden

$$f^{(m)}(i) = \frac{\int_{x_L^i}^{(x_L^i+x_R^i)/2} p(x)dx}{\int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x)dx} \quad (1)$$

Für den ersten Schritt (1 Qubit, $x_L^0 = 0$, $x_R^0 = x_T$) ergibt dies

$$f^{(1)}(0) = \frac{\int_0^{x_T/2} p(x)dx}{\underbrace{\int_0^{x_T} p(x)dx}_{=1}} = \int_0^{x_T/2} p(x)dx \quad (2)$$

Die gewünschte Superposition mit den richtigen Amplituden wird durch eine Rotation erreicht

$$\Theta_0 = \arccos(\sqrt{f^{(1)}(0)}) \quad (3)$$

$$|\Psi_1\rangle = \cos(\Theta_0) |0\rangle + \sin(\Theta_0) |1\rangle \quad (4)$$

$$\Rightarrow p_0^1 = f^{(1)}(0); \quad p_1^1 = 1 - f^{(1)}(0) \quad (5)$$

$$|\Psi_1\rangle = \sqrt{f^{(1)}(0)} |0\rangle + \sqrt{1 - f^{(1)}(0)} |1\rangle \quad (6)$$

(a) (3 Pkt.) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeiten $p_0^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2$ für 2 Qubits ausgehend von der Lösung für einen Qubit. Dabei ist nun die Rotation gegeben durch $\Theta_i^m = \arccos(\sqrt{f^{(m)}(i)})$.

(b) (2 Pkt.) Es gilt

$$p_i^{m-1} = \int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x)dx. \quad (7)$$

Berechnen sie p_j^m für die beiden Unterteilungen von dem Bereich i und zeigen sie, dass dann auch $p_j^m = \int_{x_L^j}^{x_R^j} p(x)dx$ (Induktionsschritt).

(c) (3 Pkt.) Wir definieren die Wahrscheinlichkeitsdichte als

$$p(x) = 2x\Theta(x)\Theta(1-x), \quad x_T = 1. \quad (8)$$

Berechnen sie $|\Psi_3\rangle$.

2. Suzuki-Trotter Formel**(8 Punkte)**

Es soll gelten $[X, [X, Y]] = 0$ und $[Y, [X, Y]] = 0$. Zeigen sie, dass

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y]. \quad (9)$$

Zeigen sie damit, dass gilt

$$e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X, Y]}, \quad (10)$$

und

$$e^{\delta(X+Y)} = e^{\delta X} e^{\delta Y} \cdot [1 + \mathcal{O}(\delta^2)]. \quad (11)$$

Für Interessierte: Der allgemeine Fall kann in dem original Paper von Suzuki (1976) nach gelesen werden.

https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103900351