

# Einführung in die Quanteninformaton

## Übungsblatt 4

Dr. Michael Marthaler  
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2017

27.06.2017

### 1. 7-Qubit Steane Code

(9 Punkte)

Wir nutzen den 7-Qubit Steane Code aus der Vorlesung um Bit-Flip Fehler in einem beliebigen initial Zustand  $|\Psi\rangle_I^0 = \alpha|0\rangle_L + \beta|1\rangle_L$  zu untersuchen. Die Stabiliser für diesen Code sind:

$$\begin{aligned} K^1 &= 111XXXX; & K^2 &= X1X1X1X; & K^3 &= 1XX11XX \\ K^4 &= 111ZZZZ; & K^5 &= Z1Z1Z1Z; & K^6 &= 1ZZ11ZZ \end{aligned} \quad (1)$$

In der Abbildung 1 ist der Steane Code zur Korrektur von Bit-Flip Fehlern dargestellt.

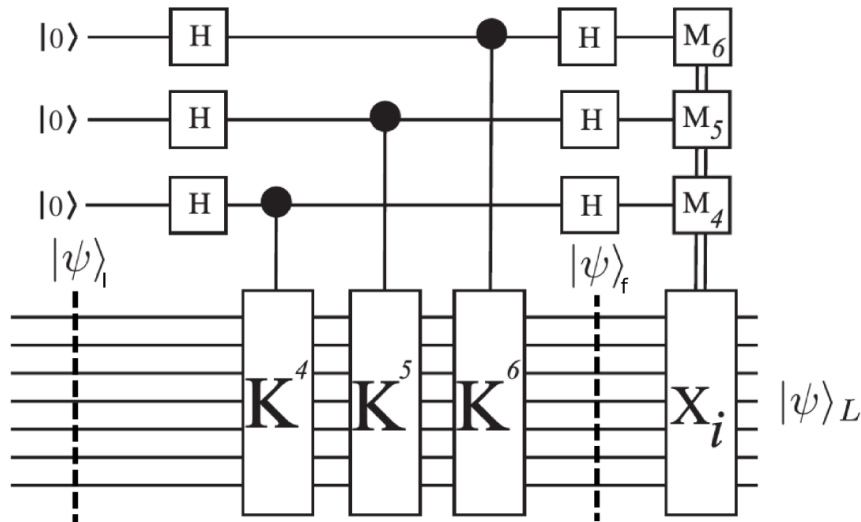


Abbildung 1: Schaltkreisabbildung des Steane Codes zur Korrektur von Bit-Flip Fehlern

- (2 Pkt.) Berechnen sie  $|\Psi\rangle_f$  für alle möglichen Messungen von  $M_4$ ,  $M_5$  und  $M_6$  in Abhängigkeit von allgemeinem Zustand  $|\Psi\rangle_I$ , der nicht ein Superpositionszustand von  $|0\rangle_L$  und  $|1\rangle_L$  sein muss.
- (1 Pkt.) Zeigen sie, welche Korrektur zu den Messungen 001, 011, und 111 gemacht werden müssen, um 000 zu erhalten.
- (2 Pkt.) Ein Bit-Flip Fehler im dritten Qubit kann geschrieben werden als  $X_3 = 11X1111$ , d.h.  $|\Psi\rangle_I = X_3|\Psi\rangle_I^0$ . Berechnen sie  $|\Psi\rangle_f$  sowie  $M_4$ ,  $M_5$  und  $M_6$  und zeigen sie, dass  $X_i$  mit  $i = 1 \cdot M_5 + 2 \cdot M_6 + 4 \cdot M_4$  den richtigen Qubit korrigiert. Zeigen sie, dass das Ergebnis  $|\Psi\rangle_L$  nach der Korrektur  $|\Psi\rangle_I^0$  ist.
- (2 Pkt.) Nehmen sie an, dass die Fehler  $X_1$  und  $X_2$  passiert sind. Was wird gemessen und ist  $|\Psi\rangle_L$  (Zustand nach Korrektur wie in (c)) ein Eigenzustand zu  $K^4, K^5, K^6$  mit positiven Eigenwerten?
- (2 Pkt.) Nehmen sie an, dass die Fehler  $X_5$  und  $Z_5$  passiert sind. Betrachten sie den gesamten Steane Code mit Phase-Flip Fehlerkorrektur und berechnen sie  $M^i$  mit  $i = 1, \dots, 6$  und ist  $|\Psi\rangle_L = |\Psi\rangle_I^0$ ?

### 2. Der Flux-Qubit

6 Punkte

Ein Josephson-Kontakt besteht aus 2 Supraleitern getrennt von einer dünnen Isolatorschicht. Wir betrachten ein Josephson-Kontakt modelliert durch eine parallel geschaltete

Kapazität und einen Josephson-Strom. Für den Josephson-Kontakt gilt

$$U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}_J \quad (2)$$

$$I_J = I_C \sin \phi_J \quad (3)$$

wobei  $\phi$  die Differenz der Phase der supraleitenden Wellenfunktion von einer zur anderen Seite des Kontakts und  $I_C$  den kritischen Strom, einer baulich bedingten Konstante, bezeichnen. Das ganze soll als Ring mit Induktivität  $L$  angeordnet werden (siehe Abbildung 2). Der Strom der Induktivität ist  $I_L = \frac{\hbar \dot{\phi}_L}{2eL}$ .  $\Phi_E$  bezeichnet den externen Fluss mit  $\Phi_E = \frac{\hbar}{2e} \phi_E$ . Die Phase einmal um die Schleife aufaddiert verschwindet,  $\phi_E + \phi_J + \phi_L = 0$ . Der Strom  $I_K$  der Kapazität ist gegeben als  $I_K = C\dot{U}$ .

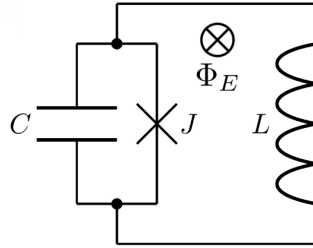


Abbildung 2: Ersatzschaltbild für realen Josephson-Kontakt.

- (a) (1 Pkt.) Die relevanten Energieskalen sind die Induktive-Energie  $E_L = \frac{\hbar^2}{(2e^2)L}$ , die Josephson-Energie  $E_J = \frac{\hbar}{2e} I_C$  und die Ladungsenergie  $E_C = \frac{2e^2}{C}$ . Benutzen sie die Kirchhoff'schen Regeln um die Bewegungsgleichung für  $\phi$  in Abhängigkeit von den Energien zu bestimmen.

- (b) (2 Pkt.) Benutzen sie die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (4)$$

um im Vergleich mit der Bewegungsgleichung aus (a) die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$  zu bestimmen.

- (c) (1 Pkt.) Berechnen sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion den Hamiltonian.  
 (d) (2 Pkt.) Bestimmen sie die zu dem Potential  $V$  zugehörigen Terme und bestimmen sie die Parameter, für die das Potential ein Doppelmuldenpotential bildet.

### 3. Getriebenes 3-Zustandssystem

5 Punkte

Wir betrachten einen anharmonischen Oszillator, den wir auf die drei niedrigsten Energie-Eigenzustände  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  reduzieren. Die Erzeuger- und Vernichteroperatoren  $a^\dagger$  und  $a$  haben die Eigenschaften  $a|0\rangle = 0$ ,  $a^\dagger|2\rangle = 0$ ,  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$  und  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ . Der Hamiltonian ist gegeben durch

$$H = \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger)^2 a^2 + g(a + a^\dagger) \cos(\omega_D t). \quad (5)$$

Hierbei ist  $\omega$  das erste Energiesplitting,  $\lambda$  das Detuning des zweiten Energiesplittings,  $g$  die Kopplung des treibenden Feldes und  $\omega_D$  die Frequenz des Feldes.

- (a) (1 Pkt.) Schreiben sie  $H$  als Matrix in der Basis  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$ .  
 (b) (2 Pkt.) Benutzen sie den unitären Operator  $U = e^{-i\omega_D a^\dagger a t}$  um ins rotierende Bezugssystem zu wechseln und verwenden sie die RWA (siehe Blatt 1). Schreiben sie das Ergebnis wieder in Matrixform.  
 (c) (2 Pkt.) Nehmen sie an, dass  $\omega_D = \omega$ . Wechseln sie in die Basis  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ ,  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  und  $|2\rangle$ . Betrachten sie die nicht diagonal Terme als Störung und berechnen sie in erster Ordnung Störungstheorie die Korrektur zu  $|2\rangle$ . Was muss gelten damit der Überlapp der Wellenfunktionen möglichst klein ist?