Einführung in die Quanteninformation
Übungsblatt 5

Dr. Michael Marthaler
M.Sc. Peter Schuhmacher

SS 2017 **12.07.2017**

1. Klassisches Modell für Dissipation **12 Punkte**

Wir betrachten ein Teilchen mit Masse m, Dämpfung γ im Potential $U(x)$ und die Gauß-verteilte stochastische Größe $\xi(t)$. Dies erfüllt die Langevin-Gleichung

$$m \cdot \ddot{x} + m\gamma\dot{x} + U'(x) = \xi(t), \tag{1}$$

wobei $\xi(t)$ die Eigenschaften hat: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2m\gamma kT\delta(t-t')$. Diese Gleichung soll nun aus einem mikroskopischen Modell für ein Teilchen gekoppelt an ein geeignetes Bad aus harmonischer Oszillatoren hergeleitet werden. Die Hamiltonfunktion, die dieses System beschreibt, ist gegeben durch $H = H_0 + H_{Bad}$; $\quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + U(x)$,

$$H_{Bad} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{P_j^2}{2M_j} + \frac{M_j}{2}\Omega_j^2 \left(X_j - \frac{c_j}{M_j \Omega_j} x \right)^2 \right]. \tag{2}$$

Dabei sind X_j und P_j Ort und Impuls des j-ten Oszillators, M_j dessen Masse, Ω_j die Frequenz und c_j die Kopplungsstärke. Dies Verteilung der Kopplungsstärke ist gegeben durch die spektrale Diche

$$J(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j} \delta(\omega - \Omega_k j). \tag{3}$$

(a) (3.Pkt.) Die Bewegungsgleichungen für das Teilchen und die Oszillatoren sind

$$m\ddot{x} + U'(x) - \sum_j c_j \left(X_j - \frac{c_j}{M_j \Omega_j^2} x \right) = 0; \; M_j \ddot{X}_j + M_j \Omega_j^2 \left(X_j - \frac{c_j}{M_j \Omega_j^2} x \right) = 0 \tag{4}$$

Zeigen sie, dass die Lösung für den getriebenen harmonischen Oszillator gegeben ist durch

$$X_j(t) = \frac{c_j}{M_j \Omega_j} \int_{t_0}^{t} dt' \sin[\Omega_j(t-t')] x(t') + X_j^{(0)}(t) \tag{5}$$

$$\text{Homog. Lsg.: } X_j^{(0)}(t) = X_j(t_0) \cos[\Omega_j(t-t_0)] + \frac{\dot{X}_j(t_0)}{\Omega_j} \sin[\Omega_j(t-t_0)] \tag{6}$$

(b) (3Pkt.) Einsetzen in die Bewegungsgleichungen für das Teilchen liefert

$$m\ddot{x} + U'(x) + \sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j^2} \left\{ x(t) - \Omega_j \int_{t_0}^{t} dt' \sin(\Omega_j(t-t')) x(t') \right\} = \xi(t) \tag{7}$$

$$\xi(t) = \sum_j c_j X_j^{(0)}(t). \tag{8}$$

Nutze partielle Integration, die initial Bedingung $x(t_0) = 0$ und berechne $\{\ldots\}$. Zeigen sie

$$\sum_j \frac{c_j^2}{M_j \Omega_j^2} \{\ldots\} = \int_0^{\infty} d\omega \frac{2J(\omega)}{\pi\omega} \int_{t_0}^{t} dt' \cos(\omega(t-t')) \dot{x}(t') \tag{9}$$

Die daraus resultierende Gleichung ist

$$m\ddot{x} + m \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Gamma(t-t') \dot{x}(t') + U'(x) = \xi(t) \tag{10}$$

$$\Gamma(t-t') = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} d\omega \frac{2J(\omega)}{\pi\omega} \cos(\omega(t-t')) \Theta(t-t') \tag{11}$$

(c) (3 Pkt.) Für den Rauschterm $\xi(t)$ und eine zufällige Anfangsbedingung gilt $\langle X_j(t_0)\rangle = \langle \dot{X}_j(t_0)\rangle = 0$, $\langle X_i(t_0)X_j(t_0)\rangle \propto \delta_{ij}$, $\langle X_i(t_0)\dot{X}_j(t_0)\rangle = \ldots = 0$. Aus dem klassischen Gleichverteilungssatz kann hergeleitet werden

$$\frac{M_j}{2}\Omega_j^2\langle X_j^2(t_0)\rangle = \frac{M_j}{2}\langle \dot{X}_j^2(t_0)\rangle = \frac{1}{2}kT. \tag{12}$$

Berechnen sie $\langle \xi(t)\rangle$ und $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle$.

(d) (3 Pkt.) Benutzen sie die spektrale Dichte $J(\omega) = \omega m\gamma$ und berechnen sie $\Gamma(t-t')$, $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle$ sowie die Spektralfunktion des Rauschens $S(\omega) = 2\int dt \langle \xi(t)\xi(0)\rangle e^{-i\omega t}$. Letzteres entspricht dem Fluktuations-Dissipations-Theorem.

2. Gaußverteilung für mehrere Variablen **5 Punkte**

Die Gauß-Verteilung $\rho(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_M)$ für die stochastischen Variablen $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_M$ sei definiert durch

$$\rho(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_M) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{A})}{(2\pi)^M}}\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\varepsilon_i A_{ij}\varepsilon_j\right) \tag{13}$$

wobei A eine symmetrische, positiv definite Matrix ist.

(a) (4 Pkt.) Betrachten sie die charakteristische Funktion $\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M) = \langle e^{i\sum_{j=1}^{M}\lambda_j\varepsilon_j}\rangle$ und zeigen sie, dass

$$\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}\lambda_i[A^{-1}]_{ij}\lambda_j\right) \tag{14}$$

gilt.
Hinweis: Da A symmetrisch ist, ist auch A^{-1} symmetrisch.

(b) (1 Pkt.) Berechnen sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion die Kovarianz $\langle \varepsilon_i\varepsilon_j\rangle$ und die Korrelation 4. Ordnung $\langle \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_m\varepsilon_k\rangle$.
Hinweise: $\langle \prod_j^N \xi_j\rangle = \frac{1}{i^N}\left.\frac{d^N\phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_M)}{\prod_j^N d\lambda_j}\right|_{\lambda_1=\ldots=\lambda_M=0}$

4. Atom im Strahlungsfeld **3 Punkte**

Wir betrachten ein einzelnes Spin 1/2 Teilchen (am Platz $\vec{r}_0 = \vec{0}$) gekoppelt an ein Strahlungsfeld mit vielen Moden mit den Wellenvektoren $\vec{k}$.

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_{\vec{k}}\hbar\omega_{\vec{k}}a^\dagger_{\vec{k}}a_{\vec{k}}, \quad H_1 = \sum_{\vec{k}}\hbar g_{\vec{k}}\left(\sigma_+ a_{\vec{k}} + \sigma_- a^\dagger_{\vec{k}}\right) \tag{15}$$

wobei $g_{\vec{k}}$ reell ist.

(a) (1 Pkt.) Schreiben sie den Operator H_1 im Wechselwirkungsbild bezüglich H_0.

(b) (2 Pkt.) Berechnen sie unter der Verwendung der Goldenen Regel der Quantenmechanik die Übergangsraten $\Gamma_{\substack{+\to-\\ n\to n'}}$ sowie $\Gamma_{\substack{-\to+\\ n\to n'}}$. Die Indizes n und n' symbolisieren hier die Verteilung der Photonenzahlen auf die Moden $n := \{n_{\vec{k}}\}$, $n' := \{n'_{\vec{k}}\}$. Zeigen sie zuerst, dass diese Raten geschrieben werden können in der Form,

$$\Gamma_{\substack{+\to-\\ n\to n'}} = 2\pi\sum_{\vec{k}}|\langle -,\{n'_{\vec{k}}\}|g_{\vec{k}}\sigma_- a^\dagger_{\vec{k}}|+,\{n_{\vec{k}}\}\rangle|^2\delta(\omega_0-\omega_{\vec{k}}), \tag{16}$$

$$\Gamma_{\substack{-\to+\\ n\to n'}} = 2\pi\sum_{\vec{k}}|\langle +,\{n'_{\vec{k}}\}|g_{\vec{k}}\sigma_+ a_{\vec{k}}|-,\{n_{\vec{k}}\}\rangle|^2\delta(\omega_0-\omega_{\vec{k}}). \tag{17}$$

Summieren sie die Raten über alle möglichen Endzustände des Strahlungsfeldes $\{n'_{\vec{k}}\}$. Vereinfachen sie das Ergebnis, indem sie den Übergang von einem diskreten zu einem kontinuielichen Strahlungsfeldes machen, $\sum_{\vec{k}} = V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^2}$, und verwenden sie die Dispersionsrelation $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$.