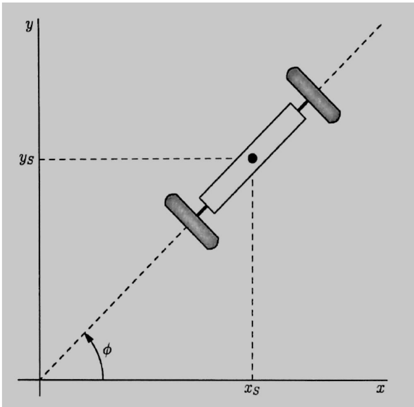
Theoretische Physik I

SS 2015
Saalübung **22.07.2015**

Problem 1: Schwere Achse (Zwangsbedingungen)

Wir betrachten die reibungslose Rollbewegung einer schweren Achse (Masse m, Trägheitsmoment I) in der geneigten x-y-Ebene. Zur Vereinfachung nehmen wir die Räder als masselos an. Die y-Achse nehme den Winkel α gegenüber der Horizontalen ein. Zur Beschreibung des Problems setzen wir $z_s = 0$ und beschränken uns auf die Koordinaten x_s, y_s, ϕ.



(a) Geben Sie die differentielle Zwangsbedingung an, die den Winkel ϕ mit der Rollrichtung in der x-y-Ebene verbindet.

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Bedenken Sie, dass die y-Achse um den Winkel α geneigt ist. Welche Variablen sind zyklisch? Was sind die entsprechenden Erhaltungsgrößen?

(c) Stellen Sie die Lagrangegleichungen erster Art mit dem Lagrangemultiplikator μ auf.

(d) Eliminieren Sie den Lagrangemultiplikator aus den Gleichungen und geben Sie drei Differentialgleichungen an, durch die x,y und ϕ bestimmt werden können.

(e) Lösen Sie das Gleichungssystem für die Anfangsbedingungen:

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \omega, \quad x(0) = 0 = \dot{x}(0) = y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die zeitliche Ableitung von $\dot{x}\sin(\omega t) - \dot{y}\cos(\omega t)$, die sie anschließend nutzen, um $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ zu bestimmen.

Problem 2: Perle auf Spirale (Hamiltonformalismus, Energieerhaltung)

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei auf einer dreidimensionalen Spirale, die in den zylindrischen Koordinaten $\{\rho, \phi, z\}$ durch die Gleichungen

$$\rho = \alpha z, \quad \phi = kz \quad \text{mit } z, k, \alpha \geq 0$$

beschrieben wird. Auf die Perle wirkt die Schwerkraft $-mg\mathbf{e}_z$.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(z, \dot{z})$

(b) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls p_z

(c) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(z, p_z)$ durch eine Legendre-Transformation von $\mathcal{L}(z, \dot{z})$

(d) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (nicht lösen!)

(e) Ist die Gesamtenergie des Systems erhalten? Wenn ja, weshalb?

(f) Wie ist das asymptotische Verhalten von $\dot{z}$ für $z \to 0$?

Problem 3: Trägheitstensor

Bestimmen Sie den Trägheitstensor für

(a) das Wassermolekül, dessen Atome ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge a und Höhe h bilden (m: Masse des Wasserstoffs, M: Masse des Sauerstoffs),

(b) ein System aus sechs gleichen Punktmassen, die an den Ecken eines regulären Oktaeders mit Kantenlänge a angeordnet sind.

Problem 4: Zylinder mit Unwucht (Rotation)

Die Masse M eines nicht homogenen zylindrischen Rads mit Radius R ist so verteilt, dass eine der Hauptträgheitsachsen im Abstand a parallel zur Zylinderachse verläuft. Das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ist IS. Der Zylinder rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer horizontalen Ebene.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in der Koordinate φ auf. Wie lautet die dazugehörige Bewegungsgleichung? Geben Sie die Lösung $\varphi_{a=0}(t)$ im Spezialfall $a = 0$ an.

(b) Setzen Sie nun $\varphi(t) = \varphi_{a=0}(t) + a\xi(t)$ und entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für eine kleine Unwucht $a \ll R$ bis zur ersten Ordnung.

(c) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ als Funktion der Zeit an, wobei $\omega(0) = \omega_0$ gelten soll. Skizzieren Sie $\omega(t)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: $\sin^2(2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))$

Problem 5: Rechteckpotential (Streuung)

Betrachten Sie das Potential

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > a \\ -V_0, & r \leq a. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Streuung an einem solchen Potential identisch zur Lichtbrechung an einer Kugel mit Radius a und Brechungsindex

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}$$

ist. Zeigen Sie außerdem, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt durch

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{n^2 a^2 \left(n\cos(\theta/2) - 1\right)\left(n - \cos(\theta/2)\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos(\theta/2)\right)^2}$$

gegeben ist und berechnen sie den totalen Wirkungsquerschnitt.

Hinweis: Das Brechungsgesetz an der Grenzfläche zweier Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 lautet:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{n_2}{n_1},$$

wobei α_i die Winkel zwischen Medium i und der Auftrefffläche sind.