Theoretische Physik I

SS 2015 **29.04.2015**
Blatt 2 **Fälligkeitsdatum 06.05.2015**

Problem 1: Nichtlineare Koordinaten

Betrachten Sie folgende Parametrisierung von Koordinaten in der xy-Ebene: $x = ve^u$ und $y = ve^{-u}$

(a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{u}$ und $\hat{v}$ dieses Koordinatensystems.
(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{u}$ und $\hat{v}$ orthogonal zueiander sind.
(2 Punkte)

(c) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor in den gegebenen Koordinaten.
(3 Punkte)

(d) Skizzieren Sie zum Beispiel mithilfe eines Computers die Koordinaten als Funktion der kartesischen Koordinaten $(x, y > 0)$.
(2 Punkte)

Problem 2: Wann ist die Energie erhalten? Teil 1

Betrachten Sie ein freies Teilchen mit nicht verschwindender Anfangsgeschwindigkeit, das sich ein einem Medium bewegt, welches die Bewegung dämpft (z.B. eine Flüssigkeit). Die Viskosität der Flüssigkeit führt zu einer Reibungskraft $F_v = -\alpha \dot{x}$. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0,$$

wobei $\alpha > 0$

(a) Bestimmen Sie die Trajektorie $x(t)$, parametrisiert durch zwei Konstanten A und B.
(3 Punkt).

(b) Geben Sie mithilfe des vorigen Ergebnisses einen Ausdruck für die kinetische Energie als Funktion der Zeit an. Erklären Sie, warum die kinetische Energie abnimmt. Verwenden Sie hierfür einmal die Gleichung und einmal physikalische Argumente.
(7 Punkte)

Problem 3: Wann ist die Energie erhalten? Teil 2

Betrachten Sie einen Planeten der Masse M ohne Eigenrotation und Atmosphäre, sowie ein Raumschiff der Masse m, welches vertikal startet und sich schnellstmöglich vom Planeten entfernen möchte (also geradlinig). Legen Sie die x-Achse in Flugrichtung, wobei $x = 0$ im Zentrum des Planeten mit Radius x_R liegt. Ein paar Minuten nach dem Start gibt es technische Schwierigkeiten und der Antrieb des Raumschiffs fällt aus. Aufgrund der Gravitation wird das Raumschiff langsamer, hält an und beginnt schließlich sich zurück zum Planeten zu bewegen. Die Position, an der die Geschwindigkeit Null wird bezeichnen wir mit x_0.

(a) Wir nehmen an, dass das Gravitationsfeld auf der relevanten Längenskala ungefähr konstant ist (Variation um weniger als 1%) und verwenden daher die Gravitation an der Oberfläche. Geben Sie einen Ausdruck für die Gesamtenergie des Systems an, der zu allen Zeiten gültig ist.
(2 Punkt)

(b) Beweisen Sie unter Zuhilfenahme obigen Ergebnisses und der Bewegungsgleichung, dass die Gesamtenergie erhalten ist. Die Gravitationskraft an der Masse m im Gravitationsfeld U ist $\vec{F}_g = m\, dU/dx\ \vec{r}$ wobei $\vec{r}$ der Einheitsvektor ist, der von m zu M zeigt.
(5 Punkte)

(c) Wie viel Zeit hat die Crew eine Lösung zu finden bevor es zum Aufschlag kommt?
(3 Punkte)

Numerische Konstanten :

- Gravitationskonstante: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N·(m/kg)^2
- Planetenmasse (ähnlich zu Merkur): $M = 328.5 \times 10^{21}$ kg
- Masse des Raumschiffes: $m = 100000$ kg (zukünftige Space X Mars Mission ;-)
- Planetenradius (ähnlich zu Merkur): $R = 2440000$ m
- $x_0 = 10000$ m

Hinweis : Der einfachste Weg ist mithilfe der Energieerhaltung eine Differentialgleichung erster Ordnung zu finden und diese mittels Trennung der Variablen zu lösen. An einer Stelle können Sie z.B. Mathematica oder Maple nutzen, um ein auftretendes Integral zu lösen. Alternativ können Sie auch den kostenlosen Online-Servive unter http://integrals.wolfram.com verwenden.

Problem 4: Zuckerhut

Betrachten Sie ein Teilchen, das sich unter Einfluss eines eindimensionalen, umgekehrten (negativen) harmonischen Potentials bewegt.

(a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Teilchens (gegeben durch $dE/dt = 0$)?
(1 Punkt)

(b) Finden Sie zwei Lösungen zu obiger Differentialgleichung, indem Sie einen exponentiellen Ansatz wählen.
(2 Punkte)

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung für die Anfangsposition x_0 und anfängliche Geschwindigkeit v_0 an.
(2 Punkte)

(d) Was sind die 6 möglichen Trajektorien des Teilchens für positive/negative x_0 und v_0?
(2 Punkte)

(e) Was lässt sich daraus über die Energie des Systems sagen?
(2 Punkte)

(f) Es existiert eine siebte Lösung für den Fall dass x_0 und v_0 beide verschwinden. Was sagen uns die vorigen Resultate über dieses Ergebnis?
(1 Punkt)