# Theoretische Physik I

**SS 2015** **22.04.2015**
**Blatt I** **Fälligkeitsdatum 29.04.2015**

## Problem 1: Variablentrennung

Seperation der Variablen ist eine Methode zur Lösung von Differentialgleichungen. Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung so umgeschrieben werden kann, dass die linke Seite nur von $y$ und die rechte Seite nur von $x$ abhängt.
(2 Punkte)

(b) Integration beider Seiten dieser Gleichung liefert eine allgemeine Lösung des Problems. Wenden Sie die Methode auf folgende Gleichung an

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung einen freien Parameter beinhaltet.
(4 Punkte)

(c) Der letzte Schritt dieser Methode ist die Bestimmung der freien Parameter mittels Anfangsbedingungen. Wie ist die endgültige Lösung für $y(1) = \alpha$?
(2 Punkte)

## Problem 2: Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

Betrachten Sie eine sich entlang der x-Achse bewegende Masse $m$ an einer Feder mit Federkonstante $k$, wobei an der Masse die Reibungskraft $F_F = -\alpha\dot{x}$ angreift.

(a) Leiten Sie mithilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes die Bewegungsgleichung her.
(1 Punkt)

(b) Die Bewegungsgleichung ist die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung. Schlagen Sie einen Lösungsansatz vor und verifizieren Sie diesen.
(2 Punkte)

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

wobei $\dot{x}$ die erste und $\ddot{x}$ die zweite Ableitung nach der Zeit bezeichnen.

(c) Bestimmen Sie mithilfe Ihres Ansatzes das charakteristische Polynom dieser Gleichung und bestimmen Sie dessen Nullstellen.
(2 Punkte)

(d) Nehmen Sie eine starke Dämpfung des Systems an, d.h. $\Delta > 0$ mit $\Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in Abhängigkeit von zwei Konstanten A und B.
(4 Punkte)

(e) Nutzen Sie die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2$, um diese Konstanten zu bestimmen.
(1 Punkt)

## Problem 3: Kugelkoordinaten

Betrachten Sie die Position eines Teilchens mit Masse $m$ in Kugelkoordinaten, gegeben durch den Vektor $\vec{r} = r\hat{r}$ mit radialem Einheitsvektor $\hat{r}$.

(a) Berechnen Sie die kinetische Energie des Teilchens in Kugelkoordinaten.
(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Beschleunigung des Teilchens in Kugelkoordinaten. Ist dieser Ausdruck nützlich für praktische Anwendungen?
(5 Punkte)

## Problem 4: Linienintegrale

Betrachten Sie die Vektorfelder $F = xy\hat{e}_x$ und $G = 2x\hat{e}_x + \hat{e}_y$.

(a) Berechnen Sie direkt jeweils das Linienintegral entlang eines Kreises mit Radius 2 um den Ursprung, wobei die Trajektorie im Punkt (0,2) beginnt und in (2,0) endet.
(5 Punkte)

(b) Berechen Sie obige Linienintegrale nun mithilfe der Rotation des Vektorfeldes oder dem Gradienten eines skalaren Feldes.
(5 Punkte)