Theoretische Physik I

SS 2015 **06.05.2015**
Blatt 3 **Fälligkeitsdatum 13.05.2015**

Problem 1: Teilchen im attraktiven Potential

Betrachten Sie ein Teilchen, welches sich in einem attraktiven Potential der Form $U = \alpha|x|^q$ mit $\alpha, q > 0$ befindet, und die Gesamtenergie $E > 0$ besitzt.

(a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Umkehrpunkte der periodischen Bewegung her. (3 Punkte)

(b) Leiten Sie nun einen Ausdruck für die Periodendauer T der periodischen Bewegung her. Ein guter Weg, solch komplizierte Integrale zu handhaben, ist es, sie dimensionslos zu machen. Führen Sie dazu eine Substitution der Form

$$u = x\left(\frac{\alpha}{E}\right)^{1/q}$$

durch, so dass das Integral unabhängig von der Energie E ist. (6 Punkte)

(c) Für welche Werte von q ist die Periodendauer unabhängig von der Energie? (2 Punkte)

(d) Nutzen Sie die folgende Relation für die Gamma-Funktion Γ

$$\int_0^1 dt \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-t)^a} = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)},$$

und drücken Sie die Periodendauer durch Gamma-Funktionen aus.
(4 Punkte)

Problem 2: Eich-Invarianz

(a) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \tag{1}$$

mit $\mathbf{q}$ als generalisierte Koordinaten, unter einer Transformation der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{dF(\mathbf{q},t)}{dt}, \tag{2}$$

wobei $F(\mathbf{q},t)$ eine beliebige Funktion ist, unverändert bleiben. (4 Punkte)

(b) Auf ein geladenes Teilchen der Masse m und Ladung q wirkt in einem elektromagnetischen Feld die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \tag{3}$$

wobei $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ die Geschwindigkeit des Teilchens in kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$ bezeichnet.

(i) Das elektrische und magnetische Feld sind durch das Skalarpotential $\varphi(\mathbf{r},t)$ und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ definiert:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A} \tag{4}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5}$$

Nutzen Sie diese Definitionen, drücken Sie die Lorentz-Kraft Gl. 3 durch die Potentiale aus und zeigen Sie, dass für deren Komponente F_i gilt

$$F_i = q\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r_i} - \partial_t A_i + \sum_k v_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_k}\right)\right), \tag{6}$$

wobei $r_k \in \{x, y, z\}$. (3 Punkte)

(ii) Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen mit Masse m und ladung q, welches sich in einem elektromagnetischen Feld befindet, lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 - q\varphi(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \tag{7}$$

Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen 1, um die Bewegungsgleichungen für das Teilchen herzuleiten. Beachten Sie dabei, dass die Potentiale von sowohl t als auch $\mathbf{r}$ abhängen. (3 Punkte)

(iii) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen, die Sie in Teil (ii) hergeleitet haben, äquivalent zur Newtonschen Bewegungsgleichung mit der Lorentz-Kraft Gl. 3 sind. Das bedeutet, dass sich die Lorentz-Kraft aus der Euler-Lagrange-Gleichung mit der in Gl. 7 gegebenen Lagrange-Funktion ergibt. (1 Punkt)

(iv) Zeigen Sie, dass die Lorentz-Kraft unter der Eich-Transformation

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla F(\mathbf{r}, t) \tag{8}$$

$$\varphi \to \varphi - \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \tag{9}$$

mit einer beliebigen Funktion $F(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ unverändert bleibt. (1 Punkt)

(v) Wie verändert sich die Lagrange-Funktion Gl. 7 unter dieser Eich-Transformation? Vergleichen Sie dies mit den Ergebnissen aus Teil (a) und kommentieren Sie. (3 Punkte)

Problem 3: Brachistochronenproblem

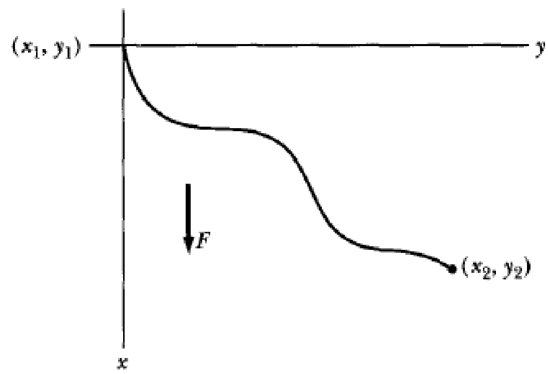

Abbildung 1: Brachistrochronenproblem: Ein Teilchen bewegt sich unter Einfluss einer konstanten Kraft entlang einer Verbindungskurve von Punkt 1 (x_1, y_1) nach Punkt 2 (x_2, y_2).

Im Folgenden betrachten wir die Bewegung eines Teilchens unter Einfluss eines homogenen, konstanten Kraftfeldes parallel zur $x-$Achse, z.B. der Gravitationskraft der Erde. Das Teilchen fällt dabei jedoch nicht frei herunter, sondern soll über eine Rutsche von einem höher gelegenen

Punkt 1 (x_1, y_1) aus der Ruhe heraus zu einem tiefer gelegenen Punkt 2 (x_2, y_2) mit $x_2 < x_1$ gleiten, siehe Abb. 1. Ziel dieser Aufgabe ist es, mithilfe der Variationsrechnung die Form der Rutsche so zu bestimmen, dass die Bewegung des Teilchens von Punkt 1 nach 2 in möglichst kurzer Zeit geschieht.

(a) Zeigen Sie, dass die Dauer der Bewegung proportional ist zu

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{1 + (dy/dx)^2}{x} \right)^{1/2},$$

wobei $y = y(x)$ die Höhe des Teilchens und damit auch die Form der Rutsche angibt. (3 Punkte)

Hinweis: Die Zeitdauer ist gegeben durch $t = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{v}$, wobei v die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Nutzen Sie aus, dass das Kraftfeld konservativ und damit die Energie bei der Bewegung konstant ist, um einen Ausdruck für die Geschwindigkeit zu bestimmen.

(b) Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um das Zeitfunktional zu minimieren, und zeigen Sie

$$y = \int dx \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

wobei a eine Konstante ist. (3 Punkte)

(c) Lösen Sie obiges Integral. Eine Substitution der Form $x = a(1 - \cos\theta)$ könnte dabei hilfreich sein. (3 Punkte)

(d) Zeichnen sie die Kurve in der $x - y$ Ebene. (1 Punkt)