Theoretische Physik I

SS 2015 **13.05.2015**
Blatt 4 **Fälligkeitsdatum 20.05.2015**

Aufgabe 1: Seifenfilm

Betrachten Sie einen Seifenfilm zwischen zwei Kreisen mit gleichem Radius. Jeder dieser Kreise sei um die x-Achse zentriert. Die Form des Films bestimmt sich aus der Minimierung der potentiellen Energie, wobei wir nur Oberflächenspannung berücksichtigen. Diese Approximation erster Ordnung ist gerechtfertigt für kleine Filmgrößen und reduziert das Problem auf die Minimierung der Oberfläche.

(a) Zeigen Sie, dass die Oberfläche durch die folgende eindimensionale Gleichung gegeben ist. (2 Punkte)

$$S(y) = 2\pi \int_{x_a}^{x_b} y(x)\sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx$$

(b) Wenden sie die Euler-Lagrange Gleichung an, um eine nichtlineare Differentialgleichung für $y(x)$ herzuleiten. (Die Euler-Lagrange Gleichung reduziert sich hier zur Beltrami Identität) (3 Punkte)

(c) Lösen Sie die Gleichung. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Zwangsbedingungen

Betrachten Sie einen umgedrehten Kegel mit halbem Öffnungswinkel α. Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens auf diesem Kegel unter dem Einfluss konstanter Gravitation.

(a) Beschreiben sie die Zwangsbedingung, die das Teilchen auf der Kegeloberfläche hält. (1 Punkt)

(b) Konstruieren Sie die Lagrangefunktion für dieses System unter Benutzung der beschränkten Koordinaten. (3 Punkte)

(c) Berechnen sie die Euler-Lagrange Gleichungen. (2 Punkte)

(d) Zeigen sie, dass das Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist (in z- Richtung). (2 Punkte)

(e) Ist der Hamiltonian erhalten? (2 Punkte)

Aufgabe 3: Bewegtes Bezugssystem

Betrachten Sie das System aus Aufgabe 2, während sich der Kegel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht.

(a) Beschreiben Sie die Zwangsbedingungen in diesem System. (1 Punkt)

(b) Was ist die Lagrangefunktion für dieses System? (4 Punkte)

(c) Was die Hammiltonfunktion?
(3 Punkte)

(d) Ist die Energie erhalten?
(2 Punkte)

Aufgabe 4: Noether-Theorem

Betrachten Sie zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 in einem ausschließlich abstandsabhängigem Potential $V(|x_1 - x_2|)$.

(a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion des Systems
(1 Punkt)

Betrachten Sie eine räumliche Galileotransformation $\xi_i = x_i + a$.

(b) Zeigen Sie, dass die Langrangefunktion invariant unter solch einer Transformation, also translationsinvariant ist.
(3 Punkte)

(c) Zeigen Sie mithilfe des Noether-Theorems, dass der Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße ist.
(6 Punkte)