Theoretische Physik I

SS 2015 **20.05.2015**
Blatt 5 **Fälligkeitsdatum 27.05.2015**

Problem 1: Geodäte auf einer Kugel

Eine Geodäte beschreibt die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte, wobei der Pfad auf einer gegebenen Oberfläche fixiert ist. Finden Sie die Geodäte auf einer Kugel.

(a) Geben Sie das infinitesimale Wegelement auf einer Kugel in Kugelkoordinaten an und finden Sie eine Integraldarstellung für die Entfernung zweier Punkte.
(3 Punkte)

(b) Verwenden Sie die Euler-Lagrange Gleichung, um die Geodäte (in Kugelkoordinaten) zu finden.
(4 Punkte)

(c) Überführen Sie die in Teil b) gefundene Lösung in rechtwinklige kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass die Geodäte dem Pfad entlang des Schnittes der Kugeloberfläche und einer beide zu verbindenden Punkte enthaltende Ebene durch den Kugelmittelpunkt entspricht.
(3 Punkte)

Problem 2: Coulomb Potential und Noethertheorem

Betrachten Sie ein Teilchen im Potential

$$U(\vec{r}) = \frac{\alpha}{\vec{r}^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wirkung invariant unter den Transformationen $\vec{r} \to \lambda\vec{r}$ und $t \to \lambda^2 t$ ist.
(4 Punkte)

(b) Konstruieren Sie die mit diesen Transformationen verbundenen Erhaltungsgrößen.
(4 Punkte)

(c) Vereinfachen Sie unter Verwendung von Energieerhaltung.
(2 Punkte)

Problem 3: Die Gallileische Gruppe

In dieser Aufgabe werden wir beweisen, dass die Galileitransformationen Gruppeneigenschaften aufweisen. Betrachten Sie die allgemeine Galileitransformation, die auf den Koordinatenvektor $(\mathbf{r}, t)$ wie folgt wirkt:

$$G(\hat{R}, \mathbf{r}_0, t_0, \mathbf{v})(\mathbf{r}, t) = (\hat{R}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, t + t_0). \tag{1}$$

$\hat{R}$ ist eine orthogonale 3×3 Matrix, die die Koordinatenrotation beschreibt. $\mathbf{r}_0$ und t_0 sind Koordinaten- und Zeittranslationen und $\mathbf{v}$ ist die Geschwindigkeit des galiläischen Boost.

(i) Die Verkettung zweier solcher Transformationen berechnet sich zu $G_2 \circ G_1(\mathbf{r}, t) = G_2(G_1(\mathbf{r}, t))$. Beweisen Sie, dass

$$G_2(\hat{R}_2, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{v}_2) \circ G_1(\hat{R}_1, \mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{v}_1)(\mathbf{r}, t) = G_3(\hat{R}_3, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{v}_3)(\mathbf{r}, t), \tag{2}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\hat{R}_3 &= \hat{R}_2\hat{R}_1 \\
\mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_2 + \hat{R}_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_2 t_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 + \hat{R}_2\mathbf{v}_1 \\
t_3 &= t_2 + t_1.
\end{aligned}$$

Damit wird gezeigt, dass die Verkettung zweier Galileitransformationen ebenfalls eine Galileitransformation darstellt.
(3 Punkte)
(*Hinweis: Sie dürfen Eigenschaften orthogonaler Matrizen ohne weiteren Beweis verwenden.*)

(ii) Definieren Sie die identische Galileitransformation, die den Koordinatenvektor unverändert lässt. Ist diese Transformation eindeutig?
(1 Punkt)

(iii) Beweisen Sie, dass Galileitransformationen assoziativ sind, also dass $G_1 \circ (G_2 \circ G_3)(\mathbf{r}, t) = (G_1 \circ G_2) \circ G_3(\mathbf{r}, t)$.
(2 Punkte)

(iv) Zeigen Sie dass für jede Galileitransformation G_1 ein Inverses G_1^{-1} existiert, sodass $G_1 \circ G_1^{-1}(\mathbf{r}, t) = G_1^{-1} \circ G_1(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}, t)$.
(2 Punkte)

(v) Sie haben nun gezeigt, dass Galileitransformationen eine Gruppe bilden. Handelt es sich um eine abelsche (kommutative) Gruppe? Dies ist der Fall, falls die Beziehung $G_1 \circ G_2(\mathbf{r}, t) = G_2 \circ G_1(\mathbf{r}, t)$ für Galileitransformationen gilt.
(2 Punkte)

Problem 4: Mehr Galileitransformationen

(a) Betrachten Sie die durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 \tag{3}$$

gegebene Lagrange Funktion eines freien Teilchens. Führen Sie einen galiläischen Boost ins Koordinatensystem $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ durch und zeigen Sie, dass nur eine totale Zeitableitung zur Lagrange Funktion addiert wird. Beeinflusst das die Dynamik des Systems?
(4 Punkte)

(b) Betrachten Sie den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, wobei $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ der (kinematische) Impuls ist. Berechnen Sie den Drehimpuls $\mathbf{L}'$ im neuen Koordinatensystem, das durch eine allgemeine Galileitransformation wie in Problem 3 definiert wird.
(4 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass innerhalb des Koordinatensystems $\mathbf{r}$ eine Spiegelung an einer durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}_i$ gegebenen Achse eine Galileitransformation darstellt.
(2 Punkte)