Theoretische Physik I

SS 2015 **03.06.2015**
Blatt 7 **Fälligkeitsdatum 10.06.2015**

Problem 1: Ein weiteres Problem mit Nebenbedingungen

Betrachten Sie ein Band, das zwischen zwei Posten identischer Höhe aufgehängt ist. Berechnen Sie die Form des Bandes, wobei Sie ein Koordinatensystem betrachten sollen, dessen Ursprung sich in der Mitte der höchsten Punkte beider Pfosten befindet. Verwenden Sie einen Lagrange-multiplikator, um die korrekte Länge des Bandes zu erzwingen. Nehmen Sie an, dass die Dichte des Bandes konstant ist und das Band niemals den Boden berührt.

(a) Geben Sie das Variationsproblem als Integral über dx an.
(3 Punkte)

(b) Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für das System an.
(3 Punkte)

(c) Wie lautet die Hamiltonfunktion? Ist sie erhalten?
(2 Punkte)

(d) Vereinfachen Sie den oben gefundenen Ausdruck, indem Sie Brüche gleichnamig machen. Wenden Sie zur Lösung die Methode der Separation der Variablen an.
(2 Punkte)

Problem 2: Zwei-Körper-Problem mit einer Feder

Betrachten Sie zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2, deren Position durch die Vektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gegeben sind. Beide Massen sind untereinander mit einer masselosen Feder (Federkonstante k) verbunden. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{x}}_2^2 + \frac{1}{2}k\left(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| - d\right)^2 . \tag{1}$$

(a) Was wird durch den Abstand d beschrieben? *Hinweis: Es ist eine Eigenschaft der Feder.*
(1 Punkt)

(b) Drücken Sie die Lagrangefunktion in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aus. Nutzen Sie dazu die Transformation

$$\mathbf{X} = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \tag{3}$$

wobei $\mathbf{X}$ die Schwerpunktbewegung beschreibt und $\mathbf{x}$ die Relativbewegung. Verwenden Sie die Definitionen $M = m_1 + m_2$ und $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, um Ihre Ergebnisse zu vereinfachen.
(2 Punkte)

(c) Betrachten Sie nun ausschließlich die Schwerpunktbewegung. Was beschreibt die zugehörige Lagrangefunktion?
(1 Punkt)

(d) Jetzt betrachten Sie ausschließlich die (interessantere) Relativbewegung. Schreiben Sie die entsprechende Lagrangefunktion der Relativbewegung $\mathbf{x}$ in sphärischen Koordinaten.
(2 Punkte)

(e) Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen, um die folgenden drei Bewegungsgleichungen für die Relativbewegung in Kugelkoordinaten zu erhalten:

$$\frac{d}{dt}[\dot{r}] = r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}(r-d) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}[r^2\dot{\theta}] = r^2\sin\theta\cos\theta\ \dot{\phi}^2 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}[r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}] = 0 \tag{6}$$

(3 Punkte)

(f) Reduzieren Sie die obigen Bewegungsgleichungen auf eine einzelne, deren Gestalt Sie an die Bewegungsgleichung im Keplerproblem erinnern sollte. Sie sollten während Ihrer Rechnung eine Integrationskonstante einführen, die dem Drehimpuls entspricht
(3 Punkte)

(g) Berechnen Sie die Bahnkurve für $d = 0$. Ist diese geschlossen?
(3 Punkte)

Problem 3: Kegelschnitte

Untersuchen wir die in der Vorlesung betrachteten Kegelschnitte.

(a) Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die äquidistant zu einem fixierten Punkt F (genannt: Fokus) und einer fixen Gerade (genannt: Leitkurve) ist. Die Gerade, die durch den Fokus und senkrecht zur Leitkurve verläuft nennt man die Achse der Parabel. Dies ist äquivalent dazu, die Exzentrizität eines Kegelschnittes zu eins zu setzen. Dafür setzt man $\epsilon = 1$ in der Formel für die Kepler-Bahnkurve $\frac{p}{r} = 1 + \epsilon\sin(\phi)$.

Zeigen Sie, dass für Gleichung einer Parabel mit Fokus $(0, p)$ und Leitkurve $y = -p$ gilt:

$$x^2 = 4py$$

(5 Punkte)

(b) Stellen Sie die Lösung in der $x - y$ Ebene dar.
(2 Punkte)

(c) Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte, sodass die Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes zu zwei Fokussen konstant ist. Dadurch werden zwei disjunkte Kurven in der xy-Ebene definiert. Dies entspricht bei Kegelschnitten einer Exzentrizität größer als eins. Dafür setzt man $\epsilon > 1$ in der Formel für die Kepler-Bahnkurve.

Nehmen Sie an, dass die Fokusse sich auf der x-Achse bei $(\pm c, 0)$ befinden und die Differenz der Entfernungen $\pm 2a$ beträgt. Zeigen Sie, dass die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

lautet, wobei $c^2 = a^2 + b^2$.
(5 Punkte)

(d) Skizzieren Sie die dadurch definierte Kurve.
(3 Punkte)