Theoretische Physik I

SS 2015 **10.06.2015**
Blatt 8 **Fälligkeitsdatum 17.06.2015**

Aufgabe 1: Keplerproblem - Laplace-Runge-Lenz Vektor

Notation: Vektoren werden fett geschreiben, z.B. $\mathbf{r}$. Die dazugehörigen Beträge in Normalschrift, $|\mathbf{r}| = r$.

Betrachten sie das Keplerproblem: zwei Körper gehorchen der folgenden Gleichung:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\,,$$

wobei m die Masse, $\mathbf{e}_r$ der Einheitsvektor $\mathbf{r}/r$ und k eine Konstante ist, die die gegenseitige Wechselwirkung charakterisiert. Wir nehmen an wir wissen bereits, dass Energie und Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ erhalten sind. Wir untersuchen eine andere wichtige Erhaltungsgröße, erstmals entdeckt von Jakob Hermann und danach von Laplace, Runge und anderen. Dieser sogenannte Laplace-Runge-Lenz(LRL) Vektor hat verschiedene Anwendungen; so wurde er zum Beispiel von Pauli benutzt um das Spektrum des Wasserstoffatoms herzuleiten.

Der LRL Vektor hat die Form

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\mathbf{e}_r.$$

1. Zeigen Sie mithilfe der Bewegungsgleichung, dass die drei Komponenten des Vektors erhalten sind.
(3 Punkte)

2. Um die Bedeutung des Vektors zu verstehen, berechnen wir die Trajektorie (eine Ellipsenbahn).

   (a) Führen Sie den Winkel θ ein, sodass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar\cos\theta$ gilt. Zeigen Sie damit, dass

   $$r = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}{mk}\frac{1}{1 + \frac{A}{mk}\cos\theta}$$

   (4 Punkte)

   (b) Die obige Trajektorie beschreibt eine Ellipse. Leiten Sie die physikalische Bedeutung von Betrag und Richtung des mit mk reskalierten LRL Vektors ab.
   (2 Punkte)

3. Typischerweise können Erhaltungsgrößen aus Systemsymmetrien abgeleitet werden. In diesem Fall ist eine Symmetrie nicht direkt ersichtlich, insbesondere da wir eine weitere Dimension einführen müssen, um die Symmetrie zu erkennen.

   (a) Schreiben Sie zuerst die Gleichung der Energieerhaltung für dieses System nieder.
   (2 Punkte)

   (b) Wir führen eine neue Zeitvariable s ein, die in folgender Relation zur alten steht:

   $$\frac{dt}{ds} = r$$

   Schreiben sie mithilfe dieser Relation die Gleichung zur Energieerhaltung so um, dass sie nurnoch von den Ableitungen von $\mathbf{r}$ und t nach s abhängt.
   (3 Punkte)

(c) Betrachten Sie den Fall negativer Energie. Finden Sie eine Variablentransformation der Zeit $\tau = f(t)$ und zeigen sie damit, dass die Energieerhaltung folgende Form annehmen kann:

$$\left(\frac{d\tau}{ds} - T\right)^2 + \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|^2 = R^2,$$

mit zu bestimmenden Konstanten T und R.
(3 Punkte)

(d) Welche Oberfläche beschreibt diese Gleichung ?
(1 Punkt)

(e) Betrachten Sie die erweiterte Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = (\frac{d\tau}{ds} - 1)\mathbf{e}_t + \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

wobei $\mathbf{e}_t$ den Einheitsvektor der vierten Dimension bezeichnet. Ab jetzt betrachten wir außerdem die normierten Gleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \quad \text{und} \quad \left(\frac{dt}{ds} - 1\right)^2 + |\mathbf{r}'|^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit einer harmonischen Dynamik folgt.

$$\frac{d^2\mathbf{v}}{ds^2} + \mathbf{v} = 0$$

(4 Punkte)

(f) Eine solche Dynamik ist rotationsinvariant. Dies bedeutet, dass das zugehörige Drehmoment

$$\mathbf{L}_4 = \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}$$

erhalten ist. Zeigen Sie, dass sich dieses vierdimensionale Drehmonemt wie folgt zerlegen lässt:

$$\mathbf{L}_4 = \mathbf{C}_1 - \mathbf{e}_t \times \mathbf{C}_2$$

mit

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{r}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{r}((r-1)\mathbf{r} + \frac{dr}{ds}\frac{d\mathbf{r}}{ds})$$

(2 Punkte)

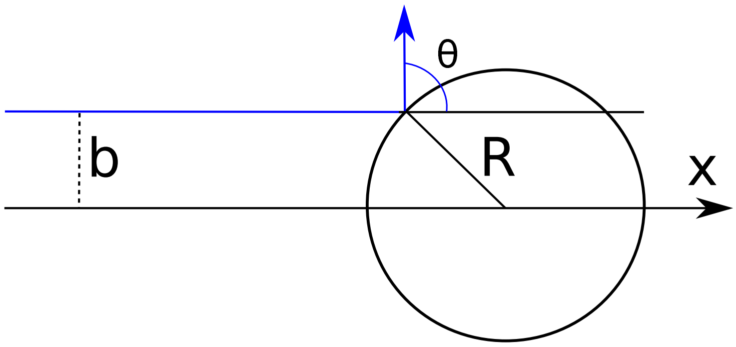
(g) Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}_1$ proportional zum üblichen dreidimensionalen Drehmoment ist.
(2 Punkte)

(h) Was bedeutet dies für die Dynamik von $\mathbf{C}_2$?
(1 Punkt)

(i) Zeigen Sie schließlich, dass $\mathbf{C}_2$ proportional zum LRL Vektor ist.
(3 Punkte)

Aufgabe 2: Streuung an einer harten Kugel

Betrachten Sie eine harte Kugel mit Radius R gegen die ein Strahl von Teilchen trifft. Die Kollision sei elastisch, die Kugeloberfläche statisch.



(a) Berechnen Sie den Stoßparameter b als Funktion des Streuwinkels θ mittels einfacher Geometrie.
(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie mithilfe dieses Resultats den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.
(3 Punkte)

(c) Zeigen Sie weiterhin, dass der gesamte Wirkungsquerschnitt einer Scheibe mit Radius R entspricht.
(2 Punkte)

(d) Erklären Sie, warum dieses Ergebnis zu erwarten war.
(2 Punkte)