Theoretische Physik I

SS 2015 **17.06.2015**
Blatt 9 **Fälligkeitsdatum 24.06.2015**

Wie im LSF angekündigt findet die Klausur statt am Donnerstag den 6. August 2015, 9-12 Uhr im großen Physik-Hörsaal. Als Hilfsmittel ist ein handgeschriebenes DIN A4-Blatt erlaubt.

Aufgabe 1: Kegelschnitte – Vertiefung

Auf einem vorherigen Übungsblatt wurde die Hyperbel betrachtet. Diese kann auch definiert werden als die Menge von Punkten, deren Abstand zum Brennpunkt proportional zum Abstand einer vertikalen Linien, der Direktorix oder auch Leitlinie, ist, wobei das Verhältnis r dieser beiden Abstände größer ist als eins.

(a) Welche Bedingung muss r erfüllen, sodass diese Definition mit der einst betrachteten übereinstimmt? (Hinweis: es sollten keine linearen Terme in der Hyperbelgleichung vorkommen.)
(2 Punkte)

(b) Finden Sie die Gleichung der Hyperbel und zeichnen Sie deren Kurve sowie Leitlinie.
(2 Punkte)

Ein Kegelschnitt mit Leitlinie bei $x = 0$, Brennpunkt bei $(p, 0)$, und Exzentrizität $e > 0$ erfüllt die Kegelschnittgleichung

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2px + p^2 = 0.$$

(c) Zeigen Sie, dass diese Gleichung in den Koordinaten $y' = y/p$ und $x' = x/p$ unabhängig ist vom Brennpunkt.
(2 Punkte)

(d) Sei $e \neq 1$. Finden Sie in den neuen Koordinaten $\bar{y} = (1 - e^2)y'$ und $\bar{x} = (1 - e^2)x'$ die Kegelschnittgleichung. Führen Sie einen letzten Variablenwechsel durch mit $\tilde{y} = \bar{y}$ und $\tilde{x} = \bar{x} - 1$ und zeigen Sie, dass der Kegelschnitt der gewöhnlichen Form für eine Ellipse und/oder Hyperbel entspricht.
(3 Punkte)

(e) Zeichnen Sie für $0 < e < 1$ den Kegelschnitt jeweils in der $\tilde{x} - \tilde{y}$-Ebene, der $\bar{x} - \bar{y}$-Ebene und der $x' - y'$-Ebene.
(2 Punkte)

(f) Wiederholen Sie das Ganze für $e > 1$.
(2 Punkte)

(g) Finden Sie für $e = 1$ und die Variablen $\bar{y} = y'$ und $\bar{x} = x' - 1/2$ die Kegelschnittgleichung. Zeichnen Sie die Kurve in der $\bar{x} - \bar{y}$-Ebene und $x' - y'$-Ebene.
(2 Punkte)

Aufgabe 2: Sreuung zweier Körper im Laborsystem

In der Vorlesung wurde die Streuung zweier Körper in derem Schwerpunktsystem (SPS) betrachtet. Bezeichnen nun $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ die Ortsvektoren im SPS, und $\mathbf{r}'_1$ und $\mathbf{r}'_2$ die Ortsvektoren im Laborsystem (LS). Der Schwerpunkt ist dann im SPS gegeben durch $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/M$ und im LS durch $\mathbf{R}' = (m_1\mathbf{r}'_1 + m_2\mathbf{r}'_2)/M$. Der Abstandsvektor der beiden Körper ist in beiden System gleich, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}' = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$.

(a) Während des gesamten Streuprozesses ist der Gesamtimpuls $\dot{\mathbf{R}}'(t)$ konstant. Berechnen Sie nun mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{r}'_2(-\infty) = 0$ und $\dot{\mathbf{r}}'_2(-\infty) = 0$ den Wert von $\dot{\mathbf{R}}'(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}(-\infty)$?
(2 Punkte)

(b) $\dot{\mathbf{r}}'_1(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ sind über die Galileitransformation $\dot{\mathbf{r}}'_1(t) = \dot{\mathbf{r}}'_1(t) + \dot{\mathbf{R}}'(t)$ miteinander verknüpft. Zeichnen Sie nun den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\dot{\mathbf{r}}'_1(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}_1(t)$ für $t = -\infty$ (lange bevor der Wechselwirkung) und für $t = \infty$ (lange nach der Wechselwirkung). Ihre Zeichnung sollte für $t = \infty$ die Winkel θ und θ' enthalten.
(4 Punkte)

(c) Zeigen Sie, ausgehend von Ihrer Zeichnung in Teil (b), dass

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2} \tag{1}$$

(2 Punkte)

(d) Die Teilchenstromdichte ist in beiden Systemen gleich , $j = j'$. Finden Sie damit einen Zusammenhang zwischen den differentiellen Wirkungsquerschnitten $d\theta/d\Omega$ und $d\theta'/d\Omega'$.
(3 Punkte)
(*Hinweis: Sie können ausnutzen, dass Zeitintervalle invariant unter einer Galileitransformation sind, und dass die Anzahl der Kollisionen gleich sind in beiden Systemen.*)

(e) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den Fall $m_2 \gg m_1$.
(2 Punkte)

(f) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den Fall $m_2 = m_1$.
(2 Punkte)

Aufgabe 3: $\mathbf{U(r) = \alpha/r^2}$ Potenzial

(a) Berechnen Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für das abstoßende Potenzial $U(r) = \alpha/r^2$ mit $\alpha > 0$.
(6 Punkte)

(b) Existiert der totale Streuquerschnitt σ? Warum oder warum nicht?
(4 Punkte)