Theoretische Physik I

SS 2015 **15.07.2015**
Blatt 13 **Fälligkeitsdatum 22.07.2015**

Klausuren:

Die 1. Klausur findet am 06.08.15 von 9:00-12:00 Uhr in Gebäude C6.3 statt (großer Hörsaal)
Die 2. Klausur findet am 12.10.15 von 9:00-12:00 Uhr in Gebäude C6.3 statt (HS I)

Aufgabe 1

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q, das sich unter Einfluss von magnetischem Feld $B = \nabla \times \vec{A}$ und elektrischem Feld $\vec{E} = d\vec{A}/dt$ bewegt.

(a) Die potentielle Energie ist gegeben durch $U = q\vec{v} \cdot \vec{A}$. Berechnen Sie die Lagrangefunktion und den kanonischen Impuls.
(2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion der kinetischen Energie des Teilchens entspricht.
(2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems und drücken Sie diese durch $\vec{A}$ aus.
(3 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass diese Gleichungen äquivalent zur Lorentzkraft $m\ddot{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ sind
(3 Punkte)

Aufgabe 2: Poissonklammern

Betrachten wir einen Phasenraum mit den Koordinaten $(q_k, p_k)_{k \in [1;N]}$. Die Poissonklammer zweier Funktionen f und g can folgendermaßen definiert werden:

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right)$$

(a) Betrachten Sie eine zeitunabhängige Hamiltonfunktion H und eine zeitabhängige Größe A. Beweisen Sie, dass die Bewegungsgleichung für A die Form

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$$

annimmt.
(1 Punkt)
Nutzen Sie dies, um die Hamiltongleichungen umzuschreiben.
(1 Punkt)

(b) Erklären Sie *in wenigen Worten*, warum diese Form der Bewegungsgleichung nicht von der Krümmung des Phasenraums abhängt.
(3 Punkte)

<u>*Hinweise:*</u>

1. *Was ist der Unterschied zwischen dem Gradienten in kartesischen Koordinaten („flacher“ Raum) und Kugelkoordinaten („gekrümmter“ Raum)?*
2. *Die erste Ableitung einer eindimensionalen Kurve gibt die Steigung an; die zweite Ableitung die Krümmung.*

3. *In manchen Fällen ist es möglich die Poissonklammer ohne obige Defintion (sprich: ohne Berechnung von Ableitungen) zu berechnen. Wir werden dies in Problem 4 verwenden.*

(c) Beweisen die folgende Eigenschaften

(i) Antikommutativität: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
(0.5 Punkte)

(ii) Distributivität: $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$
(0.5 Punkte)

(iii) Produktregel: $\{fg, h\} = \{f, h\}g + \{g, h\}f$
(1 Punkt)

(d) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3

(a) Betrachten Sie einen freien harmonischen Oszillator und nehmen Sie einen zusätzlichen linearen Potentialterm $F_0 x$ an (Dies entspricht einer konstanten, homogenen Kraft). Zeigen Sie, dass das resultierende System wieder ein harmonischer Oszillator ist.
(2 Punkte)

(b) Nehmen Sie an der Oszillator sei in Ruhe und zur Zeit $t = 0$ werde der lineare Term angeschaltet. Lösen Sie.
(2 Punkte)

(c) Nehmen Sie weiter an der Term wir zur Zeit T wieder ausgeschaltet. Lösen Sie.
(3 Punkte)

(d) Betrachten Sie den Grenzfall $T \to 0$ mit $f_0 = F_0 T$ konstant und lösen Sie.
(3 Punkte)

Aufgabe 4: Anwendung der Poisson Klammern auf den gekrümmten Phasenraum

Wir betrachten die Polarisation von Licht in Lichtwellenleitern (Glasfaserkabel). Sie kann beschrieben werden durch einen Vektor $\vec{S}$ auf der sogenannten Stokessphäre, sodass die Pole die zirkulare Polarisation darstellen und der Equator die lineare, etc (siehe Abb. 1). Beachten Sie, dass diese Aufgabe keinerlei Vorwissen über Polarisation erfordert.

Da dies ein eindimensionales Problem ist, ist der Phasenraum eine Sphäre und nicht die übliche R^2 Ebene. Die bedeutet eine Krümmung des Phasenraums. Beachten Sie, dass diese Aufgabe keinerlei Vorwissen über gekrümmte Räume erfordert. Das Ziel ist die Hamiltondynamik mithilfe der Poissonklammern effizient und krümmungsunabhängig zu beschreiben.

Wir führen zunächst Zylinderkoordinaten ein

$$\begin{cases} S_x = \sqrt{S_0^2 - I^2} \cos \phi \\ S_y = \sqrt{S_0^2 - I^2} \sin \phi \\ S_z = I \end{cases}$$

wobei der Grad an Linearität I die Rolle von q übernimmt und die Phase ϕ die des konjugierten Impulses p. Die Poissonklammern definieren wir wie folgt:

$$\{g_1, g_2\} = \frac{\partial g_1}{\partial \phi} \frac{\partial g_2}{\partial I} - \frac{\partial g_1}{\partial I} \frac{\partial g_2}{\partial \phi}$$

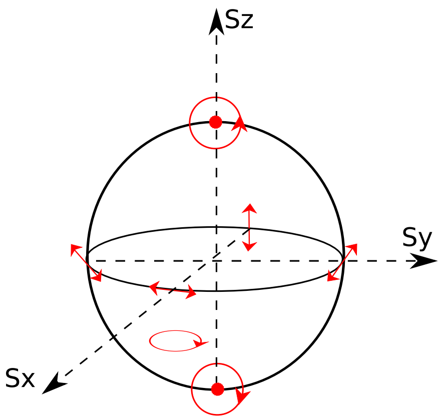

Abbildung 1: Die Stokeskoordinaten beschreiben die Polarisation von Licht.

Der Hamiltonian des Systems ist folglich

$$H = a(S_0^2 - I^2)\cos^2\phi + b(S_0^2 - I^2)\sin^2\phi + cI^2$$

mit (a, b, c) reellen Konstanten des Leiters.

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinatenmithilfe der Standard Hamilton Gleichungen her.
(1 Punkt)

(b) An welchen Punkten des Phasenraums sind die Zylinderkoordinaten nicht wohldefiniert? Warum?
(2 Punkte)

Aufgrund dessen sind in einigen Fällen die Stokeskoordinaten votzuziehen da sie überall wohldefiniert sind; allerding treten dann drei Koordinaten auf statt der üblichen (q, p). Trotzdem bleibt die Poissonstrucktur erhalten, was eine Herleitung der Hamiltongleichungen erlaubt.

(c) Berechnen Sie die Poissonklammern $\{S_x, S_y\}$, $\{S_x, S_z\}$, $\{S_y, S_z\}$ mithilfe der obigen Definition. Das Ergebnis sollte nur von Stokes Koordinaten abhängen.
(3 Punkte)

(d) Zeigen Sie das die Hamiltonfunktion in Stokeskoordinaten die folgende Form hat $\vec{S}.D_s.\vec{S}$, wobei D_s eine Diagonalmatrix ist.
(1 Punkt)

(e) Benutzen Sie die Ergebnisse aus c) sowie die Eigenschaften der Poissonklammern aus Aufgabe 2 um die Bewegungsgleichungen in Stokeskoordinaten ohne Ableitung des Hamiltons herzuleiten.
(2 Punkte)
Beschreiben Sie außerdem die zusätzliche Beschränkung die die Dynamik vollständig charakterisieren.
(1 Punkt)

Diese Gleichungen sind im Gegensatz zu denen in Zylinderkoordinaten überall wohldefiniert. Das einhergehende tiefere Verständnis der Polarisationsdynamik führte zur Erfindung des sogenannten Omnipolarisators.