Theoretische Physik I/II

WS 2014/15 **14.11.2014**
Übungsblatt IV **Abgabedatum 21.11.2014**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_I

Aufgabe 1 *Eindimensionale Bewegung*

a) Bestimmen sie die Periodendauer der Oszillation als Funktion der Energie $T(E)$ für ein Teilchen mit Masse m, das sich in einem Feld mit der potenziellen Energie $U(x) = A|x|^n$ bewegt.

Hinweis: die Eulersche Betafunktion lautet $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
Die Gammafunktion ist $\Gamma(n+1) = n!$, *falls* n *eine natürliche Zahl ist.*

(2 Punkte)

b) Bestimmen sie die Periodendauer T einer kleinen Oszillation um die Ruhelage für ein Pendel der Länge L im Schwerefeld g. Verwenden sie die Taylorreihe $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$

Hinweis: $\Gamma(1-z)\,\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

(2 Punkte)

Aufgabe 2 *Das Keplerproblem*

In Polarkoordinaten lautet die Lagrangefunktion für ein Teilchen der Masse m in einem attraktiven Zentralfeld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{\alpha m}{r}. \tag{1}$$

a) Zeigen sie, dass der Drehimpuls $L = mr^2\dot{\phi}$ erhalten bleibt. Für den Rest der Übung kann er als Konstante betrachtet werden.

(1 Punkt)

b) Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen und zeigen sie die Beziehung zwischen ϕ und r,

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\phi), \tag{2}$$

mit der Exzentrizität $e = \sqrt{1 + \frac{2Ep}{m\alpha}}$ und $p = \frac{L^2}{m^2\alpha}$.

(2 Punkte)

c) Wechseln sie nun zu kartesischen Koordinaten mit $x = r\cos(\phi)$ und $y = r\sin(\phi)$. Es seien definiert der Vektor $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Matrix Q der Form

$$Q = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Drücken sie Gleichung (2) in der Form $\vec{X}^\top Q \vec{X} = 0$ aus, indem sie die geeigneten Parameter A,B,C,D,E und F bestimmen.

(1 Punkt)

d) Falls $\det Q \neq 0$ gilt, ist die Bahnkurve ein Kegelschnitt, wie in Abbildung (1) zu sehen. Bestimmen sie $W = \det \begin{pmatrix} A, & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2}, & C \end{pmatrix}$. Zeigen sie, dass die Bahnkurve eine Hyperbel ist,

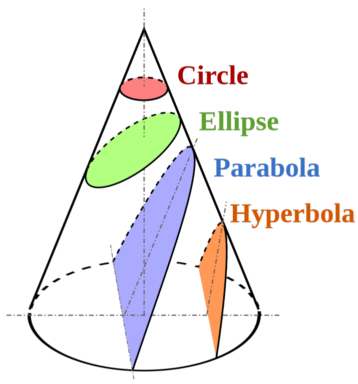

Abbildung 1: Sections of a cone.

falls $W < 0$, eine Parabel falls $W = 0$ und eine Ellipse falls $W > 0$. Für welchen Wert der Exzentrizität e ist die Bahnkurve ein Kreis? *(2 Punkte)*