Theoretische Physik I/II

WS 2014/15 **21.11.2014**
Übungsblatt V **Abgabedatum 28.11.2014**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_I

Aufgabe 1 *Keplersche Bewegung*

In Polarkoordinaten lautet die Lagrangefunktion eines Teilchens mit Masse m in einem attraktiven Zentralfeld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}\,, \tag{1}$$

wobei der Drehimpuls $L = mr^2\dot{\phi}$ eine Konstante der Bewegung ist. Falls die Energie des Teilchens E ist, können der *Parameter* $p = \frac{L^2}{m\alpha}$ und die *Exzentrizität* $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$ definiert werden, sodass für die Bahnkurve des Teilchens folgt

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\phi)\ . \tag{2}$$

Für den Fall des Newtonschen Schwerefeldes ist $\alpha > 0$.

a) Zeigen sie für $E < 0$, dass die Bahnkurve eine Ellipse beschreibt mit dem Brennpunkt im Ursprung und der Exzentrizität $0 < e < 1$. Bestimmen sie die große und kleine Halbachse der Ellipse (längster und kürzester Abstand vom Zentrum der Ellipse zu ihrem Rand). Wo liegen die Punkte mit dem größten und kleinsten Abstand zum Zentrum des Feldes? Wie groß ist die Periodendauer eines Umlaufs?

(2 Punkte)

b) Bestimmen sie die minimale Energie des Feldes (**??**) und die zugehörigen Ortskoordinaten. Welche Gestalt hat die Bahnkurve?

(1 Punkt)

c) Falls $E = 0$ gilt, ist die Bahnkurve eine Parabel und $e = 1$. Bestimmen sie den minimalen Abstand zum Zentrum des Feldes. Zeigen sie, dass durch den Parameter $-\infty < \eta < \infty$ die Bahnkurve des Teilchens geschrieben werden kann als

$$x = \frac{1}{2}p\left(1-\eta^2\right)\ ,\ y = p\eta \tag{3}$$

und die Zeit als

$$t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\frac{\eta}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\eta^2\right)\ . \tag{4}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 2 *Störung elliptischer Bahnkurven*

Wenn eine kleiner Korrekturterm $\delta U(r)$ zur potenziellen Energie $U = -\frac{\alpha}{r}$ addiert wird, dann sind die Bahnkurven nicht mehr geschlossen und nach jedem Umlauf hat sich das Perihel um einen kleinen Winkel $\delta\phi$ gedreht. Bestimmen sie $\delta\phi$ für $\delta U(r) = \frac{\beta}{r^2}$.

Hinweis: wenn r zwischen r_{min} und r_{max} variiert, dann ändert sich der Winkel ϕ um

$$\Delta\phi = -2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}. \tag{5}$$

*Entwickeln sie die Taylorreihe von Gleichung (**??**) in Potenzen von δU und behalten sie alle Terme bis zur ersten Ordnung.*

(2 Punkte)

Aufgabe 3 *Coulombsche Wechselwirkung*

Nehmen sie $\alpha < 0$ in Gleichung(**??**) und eine Energie E an.

a) Wie sieht die Bahnkurve aus? Wie groß ist der kleinste Abstand zum Zentrum des Feldes? *(1 Punkt)*

b) Zeigen sie, dass man mit den Parametern $-\infty < \xi < \infty$ und $a = \frac{\alpha}{2E}$ die Bahnkurve des Teilchens folgendermaßen schreiben kann

$$x = a(\cosh(\xi) + e), y = a\sqrt{e^2-1}\sinh(\xi) \tag{6}$$

und die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\sinh(\xi) + \xi). \tag{7}$$

(2 Punkte)