Theoretische Physik I/II

WS 2014/15 **4.11.2016**
Übungsblatt I **Abgabedatum 11.11.2016**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre

Die Erste Übung findet am 11.11.2016 im Seminarraum 0.34 im Geb. A5 1 von 12:00-14:00 Uhr statt.

- *Klausurzulassung bei erreichen von mind.* 50% *der Punkte.*
- *Einzelabgabe.*
- *Anwesenheitspflicht in den Übungen. Bei unentschuldigtem Fehlen keine Zulassung zur Klausur. Entschuldigungen direkt an Bremser, nicht an Herrn Dr. Schank und nicht an den Oberbremser!*
- *Jede bearbeitete Aufgabe muss bei Aufruf durch Bremser während der Übung vorgerechnet werden können, sonst gibt es 0 Punkte für die Aufgabe.*
- *Alle Antworten müssen (mathematisch) begründet werden.*

Aufgabe 1 *Euler-Lagrange Gleichung I - Das Prinzip der kleinsten Wirkung*

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ ist definiert als kinetische Energie K minus potentieller Energie V. Damit lässt sich die Wirkung S definieren als

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} (K - V) dt, \tag{1}$$

für einen Anfangs(End)-Zeitpunkt t_0 (t_1). Bemerkenswerterweise nimmt in jedem physikalischen System ein Objekt denjenigen Pfad, welcher S minimiert. Das Extremum der Wirkung ist gegeben durch den Pfad q, welcher

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \tag{2}$$

erfüllt.

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (2), dass für ein freies Teilchen der lineare Impuls erhalten ist. *(1 Punkt)*

b) Wie lautet $K = m\dot{\vec{v}}^2/2$ für $\vec{v} = (x, y)^T$ wenn Sie Polarkoordinaten r, θ verwenden? Zeigen Sie, dass der Drehimpuls ($mr^2\dot{\theta}$) für $V = V(r)$ erhalten ist. *(1 Punkt)*

c) Betrachten Sie ein Seil der Länge l und linearen Massendichte λ. Angenommen man befästigt die Enden des Seils jeweils an den Punkten (x_0, y_0) und (x_f, y_f) im Seminarraum E.04 (y soll dabei die vertikale Achse beschreiben), welche Form nimmt das Seil an, falls es nur unter Einwirkung der Gravitation steht? *Hinweis:* $\int(\sqrt{y^2 - a^2})^{-1} dy = \cosh^{-1}(y/a) + b$, *wobei* a *und* b *Konstanten sind.* *(4.0 Punkte)*

Aufgabe 2 *Noether Theorem*

Die zeitunabhängige Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ eines holonomen Systems sei für alle Werte des Parameters s aus einem kontinuierlichen Intervall um $s = 0$ gegenüber den differenzierbaren und umkehrbaren Koordinatentransformationen $\mathbf{q} \to \mathbf{Q}(\mathbf{q}, s)$ mit $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, s = 0) = \mathbf{q}$ invariant, sprich:

$$\forall s: \; \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \overset{\mathbf{q}\to\mathbf{Q}}{=} \mathcal{L}\left(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, s), \sum_i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right) = \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, s) \overset{!}{=} \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}). \tag{3}$$

Dann ist

$$I_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_i \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i(\mathbf{q}, s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \tag{4}$$

ein Integral der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

a) Zeigen Sie, dass für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(y) \tag{5}$$

und die Transformation

$$X = x + s, \quad Y = y, \tag{6}$$

mit zeitlich konstanten Parameter s, $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ gilt. *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (4), dass die x-Komponente des Impulses eine Konstante der Bewegung ist. *(2.0 Punkte)*

c) Kann das Noether Theorem bei gleicher Transformation auch für ein allgemeineres Potential $V(x, y)$ angewendet werden? Begründen Sie. *(2.0 Punkte)*

Aufgabe 3 *Isotropie der Zeit*

Für ein abgeschlossenes System N freier Massenpunkte, welches durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) \tag{7}$$

beschrieben wird, kann die Zeit umgekehrt werden (das geht natürlich auch für andere Systeme, nur wird es da etwas komplizierter...), d.h. t kann durch $-t$ ersetzt werden. Diese Spiegelsymmetrie der Zeit wird auch als *zeitliche Isotropie* bezeichnet. Anders als bei Translations- (siehe vorherige Aufgabe) oder Drehinvarianz (nächste Aufgabe) gibt es hier keine kontinuierlich variierbare Größe bzgl. deren Invarianz besteht. Deshalb folgt nach Gl. (4) aus der Zeitisotropie auch kein Erhaltungssatz, sondern die Eigenschaft der *Reversibilität*, das alle Teilchenbahnen

auch rückwärts durchlaufen werden können.
Beweisen Sie, dass falls $\mathbf{R}(t)$ mit $[t_1, t_2]$ die Bahn eines Systems von Massenpunkten im Konfigurationsraum beschreibt,

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(-t) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{8}$$

ebenfalls eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist (also, dass die E-L-Gl. auch von $\tilde{\mathbf{R}}(t)$ erfüllt wird, wenn das für $\mathbf{R}(t)$ der Fall ist). *(5.0 Punkte)*

Aufgabe 4 *Erhaltung des Drehimpulses*

Die Lagrangrefunktion (7) sei invariant gegenüber der beliebigen gemeinsamen Rotation

$$d\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} dt \times \mathbf{r}_i = (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_i) d\varphi \tag{9}$$

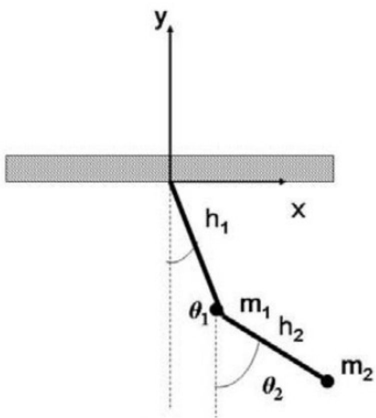
(mit $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}/\omega$ und $d\varphi = \omega dt$) aller Massenpunkte,

$$0 = d\mathcal{L}|_{\text{Rot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} d\mathbf{r}_i \Bigg|_{\text{Rot}} . \tag{10}$$

Nutzen Sie dies um zu zeigen, dass der Drehimpuls erhalten ist. *(4.0 Punkte)*

Aufgabe 5 *Euler-Lagrange Gleichung II - Das Doppelpendel*

Zwei Pendel der Längen h_1 und h_2 mit Massen m_1 und m_2 seien wie in der Abbildung miteinander verbunden.



a) Welche unabhängigen Variablen eignen sich hier zur Beschreibung des Systems? Begründen Sie. *(0.5 Punkte)*

b) Wie lautet die zugehörige Lagrangefunktion? *(1.5 Punkte)*

c) Wie lauten die Bewegungsgleichungen, die dieses System beschreiben? (Nur aufstellen, nicht lösen...) *(3.0 Punkte)*