Theoretische Physik 1+2 LAG
Übungsblatt 1

Dr. Ferdi Schank
Susanna Kirchhoff
Nicolas Wittler
Yanjun Ji

WS 19/20 **Abgabe 31.10.2019**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses.*

Aufgabe 1: Kugelkoordinaten (*10 Punkte*)

Berechnen Sie folgende Größen in Kugelkoordinaten:

(a) Ortsvektor $\vec{r}$ (*1 Punkt*)

(b) Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_\theta$ (*1 Punkt*)

(c) Ableitung der Einheitsvektoren $\dot{\vec{e}}_\rho$, $\dot{\vec{e}}_\phi$, $\dot{\vec{e}}_\theta$ (*2 Punkte*)

(d) Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ (*3 Punkte*)

(e) Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Euler-Lagrange-Gleichung (*6 Punkte*)

Gegeben sei eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}\left[\vec{q}(t)\right] \equiv \mathcal{L}\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(t), \ddot{\vec{q}}(t), t\right)$, die zusätzlich zur bisher bekannten noch von der Beschleunigung $\ddot{\vec{q}}(t)$ abhängt.

(a) Geben Sie die Definition der Wirkung S an. (*1 Punkt*)

(b) Berechnen Sie die Variation der Lagrange-Funktion als Funktional von $\vec{q}(t)$. (*1 Punkt*)

(c) Leiten Sie aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung $\delta S = 0$ die Euler-Lagrange-Gleichung her. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Euler-Lagrange-Gleichung II (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für das Quadrat der Lagrange-Funktion

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{q}} = 0$$

auch die reguläre Euler-Lagrange-Gleichung löst, wenn die totale Zeitableitung der Lagrange-Funktion verschwindet.

Aufgabe 4: Bestimmung der Extremstellen (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Stellen möglicher Extrema von

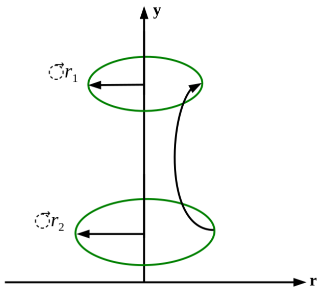
$$f(x, y) = x + 2y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Aufgabe 5: Minimale Rotationsfläche (*6 Punkte*)

Betrachten Sie die Rotationsfläche, die zwischen zwei Kreisen mit Radii $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ und Abstand $y_2 - y_1$ durch Rotation um die y-Achse erzeugt wird.



(a) Zeigen Sie, dass die Manteloberfläche S der Rotationsfigur gegeben ist durch

$$S[r,y] = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r\sqrt{1+y'^2}dr.$$

(*2 Punkte*)

(b) Bestimmen Sie die Kurvefunktion $y(r)$, für die die so erzeugte Oberfläche minimal wird, indem Sie die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

benutzen. (*4 Punkte*)

Hinweis: *Folgendes Integral könnte hilfreich sein:*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x).$$