Theoretische Physik I/II

WS 2016/17 **27.01.2017**
Übungsblatt XI **Abgabedatum 03.02.2017**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre:TP_I

Aufgabe 1 *Eichtransformation*

a) Bestimmen sie die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ bezüglich

$$V(\mathbf{r},t) = 0\,, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qt}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,. \tag{1}$$

Bestimmen sie ebenso die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$.
(2 Punkte)

b) Verwenden sie die Eichfunktion $\lambda = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qt}{r}$ um die Potenziale in Gleichung 1 derart zu transformieren, dass $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda$ und $V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$ gilt. Diskutieren sie ihr Ergebnis.
(2 Punkte)

Aufgabe 2 *Drehimpuls*

Gegeben seien die Maxwellgleichungen

$$\nabla\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\mathbf{D} = \rho_{\text{free}} \tag{2}$$

$$\nabla\mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5}$$

Wir werden in dieser Aufgabe sehen, dass sich dem elektromagnetischen Feld ein Drehimpuls zuordnen lassen kann. Die Impulsdichte ist gegeben durch

$$\frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \tag{6}$$

Es lässt sich damit die Drehimpulsdichte des elm. Feldes definieren als

$$\mathbf{l}_{em} = \frac{1}{c^2}\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \tag{7}$$

a) Wie lautet demnach der Drehimpuls des elm. Feldes? *(0.5 Punkte)*

Die Lorentzkraftdichte (in anderen Worten, die Änderungsrate der Impulsdichte) der geladenen Teilchen eines Systems ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l}_{mech} = \mathbf{r} \times (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \tag{8}$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen, dass

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{l}_{mech} =& \varepsilon_0\mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{r} \times [\mathbf{B}(\nabla\mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \\ & - \varepsilon_0\mathbf{r} \times \left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}\right) + \varepsilon_0\mathbf{r} \times \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})\end{aligned} \tag{9}$$

(3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die letzten zwei Terme geschrieben werden können als

$$-\varepsilon_0\mathbf{r} \times \left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}\right) + \varepsilon_0\mathbf{r} \times \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{d}{dt}\mathbf{l}_{em}. \tag{10}$$

(2 Punkte)

Um nun einen Ausdruck für die Änderungsrate des Gesamtimpulses (der Teilchen und des Feldes) herleiten zu können müssen wir ein paar weitere Umformungen vornehmen. Wir erinnern uns, dass die Einträge des Maxwellsche Spannungstensors $\overleftrightarrow{T}$ gegeben sind durch

$$\overleftrightarrow{T}_{\alpha,\beta} = \varepsilon_0\left[E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}|E|^2\delta_{\alpha,\beta}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}|B|^2\delta_{\alpha,\beta}\right]. \tag{11}$$

d) Zeigen Sie, dass

$$\varepsilon_0\mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\nabla\mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{r} \times [\mathbf{B}(\nabla\mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] = \mathbf{r} \times (\nabla\overleftrightarrow{T}) \tag{12}$$

(3.5 Punkte)

e) Wie lautet somit der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderungsrate des Gesamtimpulses und dem Maxwellschen Spannungstensors? *(2.0 Punkte)*