Theoretische Physik 1+2 LAG
Übungsblatt 2

Dr. Ferdi Schank
Susanna Kirchhoff
Nicolas Wittler
Yanjun Ji

WS 19/20 **Abgabe 08.11.2019**

***Info**: Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses.*

Aufgabe 1: Doppelpendel (*8 Punkte*)

Wir betrachten ein Doppelpendel (siehe Abbildung 1) im homogenen Schwerefeld der Erde.

(a) Was sind geeignete verallgemeinerte Koordinaten zur Beschreibung des Doppelpendels? (*2 Punkte*)

(b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion. (*3 Punkte*)

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. (*3 Punkte*)

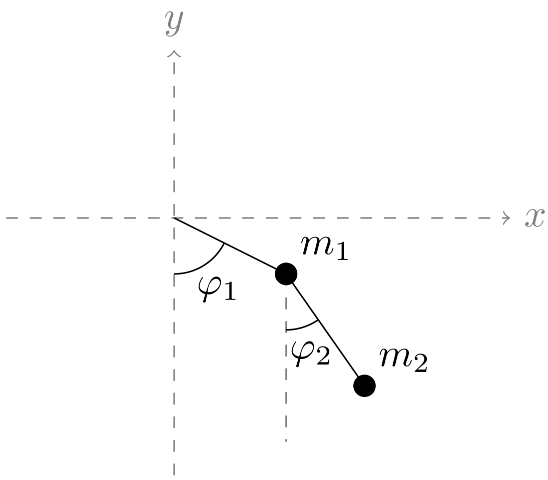

Abbildung 1

Aufgabe 2: Pendel an einer parabolischen Schiene (*8 Punkte*)

Wir betrachten ein Pendel im Schwerefeld der Erde, bei welchem sich eine Masse m_1 reibungsfrei auf einer Schiene der Form $y = x^2$ bewegen kann. Eine zweite Masse m_2 ist durch eine Stange der Länge l an der ersten Masse befestigt (siehe Abbildung 2).

(a) Was sind geeignete verallgemeinerte Koordinaten zur Beschreibung des Doppelpendels? (*2 Punkte*)

(b) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion. (*3 Punkte*)

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. (*3 Punkte*)

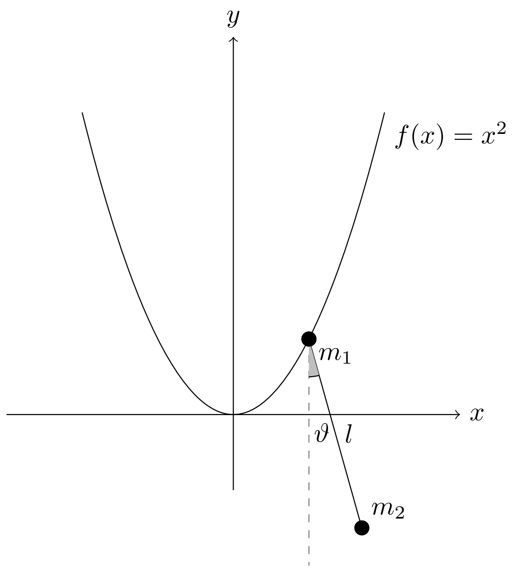

Abbildung 2

Aufgabe 3: Virialsatz (*8 Punkte*)

Für ein Teilchen in einem allgemeinen quadratischen Potenzial $U = \alpha q^2$ ist die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \alpha q^2 \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$2T = p\dot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(pq) - \frac{\partial U}{\partial q} q$$

(*2 Punkte*)

(b) Zeigen Sie, dass

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(pq)} = 0,$$

wenn $p(t)$ und $q(t)$ beschränkte Funktionen sind und $\overline{f(t)}$ den zeitlichen Mittelwert

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau f(t) \mathrm{d}t$$

bezeichnet. (*3 Punkte*)

(c) Zeigen Sie schließlich, dass für quadratische Potenziale die kinetische und potentielle Energie den gleichen zeitlichen Mittelwert annehmen, also

$$\bar{U} = \bar{T}$$

gilt. (*3 Punkte*)

Aufgabe 4: Variablentrennung (*6 Punkte*)

Separation der Variablen ist eine Methode zur Lösung von Differentialgleichungen. Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$M(x)N(y)\,\mathrm{d}x \; + P(x)Q(y)\,\mathrm{d}y \; = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung so umgeschrieben werden kann, dass die linke Seite nur von y und die rechte Seite nur von x abhängt. *(1 Punkt)*

(b) Integration beider Seiten bietet eine Familie von Lösungen. Um eine vollständige Lösung zu finden, überprüfen Sie, ob $P(x) = 0$ oder $N(y) = 0$ die Gleichung erfüllen. Wenden Sie die Methode auf folgende Gleichung an

$$xy\,\mathrm{d}x \ + (x+1)\,\mathrm{d}y \ = 0$$

Zeigen Sie, dass die Lösung einen freien Parameter beinhaltet. *(3 Punkte)*

(c) Der letzte Schritt dieser Methode ist die Bestimmung der freien Parameter mittels Anfangsbedingungen. Wie ist die endgültige Lösung für $y(0) = \alpha$? *(2 Punkte)*