Theoretische Physik I/II

WS 2016/17 **11.11.2016**
Übungsblatt II **Abgabedatum 18.11.2016**

Dr. Ferdi Schank http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre

Aufgabe 1 *Lagrangefunktion zweier Bezugssysteme*

Die Teilchen eines abgeschlossenes mechanische System K' bewegen sich relativ zu einem System K mit einer Geschwindigkeit

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i}, \tag{1}$$

welche so gewählt ist, dass der Gesamtimpuls des gestrichenen Systems verschwindet. Die Energie des als ganzes ruhenden Systems wird für gewöhnlich als innere Energie E_{in} bezeichnet und enthält die kinetische Energie der Relativbewegungen der Teilchen sowie die ptentielle Energie U ihrer Wechselwirkungen.

a) Drücken Sie die Gesamtenergie E durch die gestrichenen Koordinaten $\mathbf{v}_i'$ und v_i' aus. Betrachten Sie sowohl den obigen Fall ($\mathbf{P}' = 0$), wie auch den allgemeineren Fall ($\mathbf{P}' \neq 0$). *(1.5 Punkte)*

b) Wie transformiert sich die Wirkung S beim Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen? *(1 Punkt)*

Aufgabe 2 *Mechanische Ähnlichkeit I*

Die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht, falls die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ mit einem konstanten Faktor multipliziert wird. Im folgenden sei das Potential U eine homogene Funktion der Koordinaten, also $U(\alpha\mathbf{r}_1, ..., \alpha\mathbf{r}_n) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_n)$, wobei k die Homogenität der Funktion angibt und α eine Konstante ist. Gegeben sei die Transformation

$$\mathbf{r}_i' = \alpha\mathbf{r}_i \tag{2}$$

$$\mathbf{t}' = \beta\mathbf{t}. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie das Laufzeitverhältnis t'/t von Punkten mit verschiedenen Massen längs gleicher Bahnen bei gleicher potentieller Energie. Begründen Sie. *(1.5 Punkte)*

b) Wie ändert sich das Laufzeitverhältnis längs gleicher Bahnen bei Änderung der potentiellen Energie um einen konstanten Faktor? Nehmen Sie nun gleiche Masse an. Begründen Sie. *(1.5 Punkte)*

Aufgabe 3 *Mechanische Ähnlichkeit II*

Gegeben sei ein durch eine Lagrange Gleichung zweiter Art beschriebenes konservatives System mit f Freiheitsgraden, für das die kinetische Energie T bei konstanten Koeffizienten c_{ij} durch

$$T(\dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i,j=1}^{f} c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{4}$$

gegeben ist. Seine potentielle Energie U sei eine homogene Funktion der Lagekoordinaten, d.h. sie erfülle die Beziehung

$$U(\lambda q_i, ..., \lambda q_f) = \lambda^k U(q_i, ..., q_f), \tag{5}$$

mit konstantem Parameter k. Zu einer speziellen Lösung $q_1(t), ..., q_f(t)$ der Bewegungsgleichungen sei $q_1'(t), ..., q_f'(t)$ eine weitere Lösung die mit der ursprünglichen Lösung durch die Proportionalitätsbeziehung

$$q_i'(t') = \alpha q_i(t) \quad \text{und} \quad t' = \beta t \tag{6}$$

zusammenhängen.

a) Bestimmen Sie k für das Potential $U = U_0/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, sodass Gl. (5) erfüllt ist. *(0.5 Punkte)*

b) Bestimmen sie t'/t. An welches physikalische Gesetz erinnert Sie der gefundene Ausduck? *(1.5 Punkte)*

Aufgabe 4 *Rotierende Massen I*

Drei verschiedene Massen m_1, m_2, m_3 sitzen in den Ecken eines beliebigen Dreiecks und rotieren in der Dreiecksebene (hier: die xy-Ebene) um ihren gemeinsamen Schwerpunkt $\mathbf{R}$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Mit S' sei das rotierende Bezugssystem gekennzeichnet. Nun sollen die allgemeinste Lösung dieser Art in S' dementsprechend bestimmt werden, dass jeder der Massenpunkte relativ zu S' im Einklang mit den Beweguungsgleichungen ruht. Der Koordinatenursprung soll bei $\mathbf{r} = 0$ gewählt werden.

a) Die Bewegungsgleichungen im rotierenden Bezugssystem sind gegeben durch

$$m\frac{d'^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}' - m\frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \tag{7}$$

wobei $\mathbf{F} = -\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^3}\mathbf{r}_{ij}$ mit Gravitationskonstanten G und $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die gesuchten Ruhelagen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ auf. Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichungen so gut wie möglich und geben Sie deren explizite Form für jede der drei Massnpunkte an. *(2.0 Punkte)*

b) Nutzen Sie die 3 Bewegungsgleichungen, um zu zeigen, dass für den Schwerpunkt $\mathbf{R} = 0$ gilt. *(0.5 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass sich aus den Bewegungsgleichungen folgende Gleichungen ergeben

$$\left[\frac{\omega^2}{G} - \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} - \frac{m_3}{r_{23}^3}\right](\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - m_3\left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}\right)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0 \tag{8}$$

$$\left[\frac{\omega^2}{G} - \frac{m_1 + m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_2}{r_{23}^3}\right](\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - m_2\left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}\right)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0. \tag{9}$$

(1.5 Punkte)

d) Was ergibt sich für die drei unterschiedlichen r_{ij}^{-3} falls sich die drei Massenpunkte nicht auf einer Geraden befinden? Was ergibt sich dann für ω? *(1 Punkt)*

e) Die Massenpunkte sollen nun auf einer Geraden (Richtungsvektor $\mathbf{e}$) liegen, d.h. $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3$. Wir schreiben nun $x_{ij} \equiv x_j - x_i = -x_{ji}$. Führen Sie eine neue Variable $y = \frac{x_{23}}{x_{12}}$ ein und nutzen Sie die Beziehung $x_{13} = x_{12} + x_{23}$ um einen Ausdruck für ω in Gl. (8) zu erhalten. Sie können Voraussetzen, dass x_{12}, x_{23}, x_{13} positiv sind. *(1.5 Punkte)*

f) Nutzen Sie das Ergebnis aus e) um mit Hilfe von Gl. (9) zu zeigen, dass Lösung(en) des Drei-Körper-Problem existieren, wenn all drei Massenpunkte auf einer Geraden liegen. *(2.0 Punkte)*

Aufgabe 5 *Rotierende Massen II*

Wir betrachten eine vereinfachte Version des Dreikörperproblems, bei welchem die dritte Masse m viel leichter als die beiden anderen Massen M_1 und M_2 angenommen wird. Für ein solches System vereinfacht sich die Bewegungsgleichung für den leichteren Körper zu

$$\ddot{\mathbf{r}} = GM_1 \frac{\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}|^3} + GM_2 \frac{\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}|^3}. \tag{10}$$

Darüber hinaus wird angenommen, dass sich die Bewegung aller drei Körper auf eine zweidimensionale Ebene beschränkt ist. Wenn die zwei schweren Massen gebundene Bewegungen ausführen, werden $\mathbf{r}_1(t)$ und $\mathbf{r}_2(t)$ zu periodischen Funtionen der Zeit und m führt eine Bewegung in einem periodisch veränderlichen Kraftfeld aus. Die zwei schweren Massen sollen sich derart auf einer Kreisbahn bewegen, dass die explizite Zeitabhängigkeit der Anziehungskräfte erkennbar wird.
Der Koordinatenursprung soll im Schwerpunkt der beiden rotierenden schweren Massen liegen. Position der beiden Massen bei: $\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}(t)$ und $\mathbf{R}_2(t) = -\mathbf{R}(t)$. Für deren Bewegung gilt $Mv^2/R = GM^2/(2R)^2$, sowie $x_1(t) = R\cos(\omega t) = -x_2(t)$ und $y_1(t) = R\sin(\omega t) = -y_2(t)$.

a) Geben Sie einen Ausdruck für die Kreisfrequenz ω an. *(1 Punkt)*

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die kleine Masse m an. *(2.0 Punkte)*

c) Wie ändern sich für kleine Masse m die Energie $mv^2/2 + U_1 + U_2$ und der Drehimpuls um den Schwerpunkt der beiden schweren Massen mit der Zeit?

Hinweis: Bewegungsgleichung kann geschrieben werden als $m\ddot{\mathbf{r}} = -\partial U_1/\partial \mathbf{r} - \partial U_2/\partial \mathbf{r}$. (4.0 Punkte)