Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 25.01.2016**

Hinweis: *Die erste Klausur (früher Hauptklausur) findet am 21.02.17, 9:00-12:00 Uhr und die zweite Klausur (früher Nachklausur) findet am 04.04.17, 9:00-12:00 Uhr statt. Beide Klausuren sind im großen Hörsaal des Physiktowers.(C6.4)*

Beispielaufgabe 1: Seperable Differentialgleichung

Sogenannte autonome Dgl der Form $\dot{x} = f(x)$ können durch Seperation der Variablen gelöst werden.

a) Lösen Sie $\dot{x} = x^2$ für die Anfangsbedingungen (i)$x(0) = 2$ und (ii)$x(2) = -1$

b) Skizzieren Sie die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich mittels einer graphischen Analyse, dass die gesuchten Funktion $x(t)$ und deren Ableitung $\dot{x}(t)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.

Beispielaufgabe 2: Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $\dot{x} + 2x = t$ mit $x(0) = 0$, wie folgt:

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

b) Finden Sie durch Variation der Konstanten eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Problems

Aufgabe 1: Seperation der Variablen: Bakterienpopulation mit Toxin (*10 Punkte*)

Eine Bakterienpopulation wird der Wirkung eines Toxins ausgesetzt. Die dadurch bewirkte Todesrate ist proportional zu der Anzahl $n(t)$ der zum Zeitpunkt t noch lebenden Bakterien und der Menge $T(t)$ des zu dieser Zeit vorhandenen Toxins, also insgesamt gleich $\tau n(t)T(t)$, wobei τ eine positive Konstante ist. Andererseits erfolgt die natürliche Vermehrung der Bakterien exponentiell, also mit einer Rate $\gamma n(t)$, wobei $\gamma > 0$. Insgesamt ergibt sich für die Anzahl der Bakterien die Differentialgleichung

$$\dot{n} = \gamma n - \tau n T(t).$$

a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung, mit $n(0) = n_0$. (*2,5 Punkte*)

b) Nehmen Sie nun an, dass das Toxin mit einer konstanten Rate $T(t) = at$ zugeführt wird, wobei $a > 0$. Zeigen Sie mittels einer qualitativen Analyse der Differentialgleichung (d.h. ohne diese explizit zu lösen), dass die Bakterienpopulation bis zur Zeit $t = \gamma/(a\tau)$ noch wachsen, danach aber wieder abnehmen wird. Zeigen Sie außerdem, dass für $t \to \infty$ gilt $n(t) \to 0$, also dass praktisch alle Bakterien vernichtet werden. (*2,5 Punkte*)

c) Finden Sie nun die explizite Lösung $n(t)$ der Differentialgleichung und skizzieren sie $n(t)$ qualitativ als Funktion von t. Vergewissern Sie sich, dass die Skizze den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang zwischen $n(t), \dot{n}(t)$ und t erfüllt.(*3 Punkte*) d)* Finden Sie die Zeit, bei der die Population auf die Hälfte ihres Ausgangsbestandes geschrumpft ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2: Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten (*10 Punkte*)

Es sei $\dot{x} + tx(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, mit $x(0) = x - 0$.

a) Finden Sie die Lösung $x_h(t)$ der entsprechenden homogenen Gleichung, mit $x_h(0) = x_0$. *(3 Punkte)*

b) Finden Sie die partikuläre Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Dgl, mit $x_p(0) = 0$, mittels Variation der Konstanten, $x_p(t) = c(t)x_h(t)$. Wie lautet die Gesamtlösung? *(3 Punkte)*

c)* Für eine Differentialgleichung der Form $\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t)$ (gewöhnlich, 1. Ordnung, linear, inhomogen) hat die Summe der homogenen und partikulären Lösungen die Form:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) + c(t)x_h(t) = (1 + c(t))x_h(t) = \tilde{c}(t)x_h(t).$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ lässt sich also auch erfüllen, wenn für $x_h(t)$ und $\tilde{c}(t)$ die Anfangsbedingungen $x_h(0) = 1$ und $\tilde{c}(0) = x_0$ gewählt werden. Konstruieren Sie auf diesem Weg eine Lösung der Differentialgleichung von der Form $x(t) = \tilde{c}(t)x_h(t)$. Stimmt sie mit der in (b) erhaltene Lösung überein? *(4 Punkte)*

Aufgabe 3: Funktionen von Matrizen (*8 Punkte*)

Drücken Sie jeder der folgenden Matrixfunktionen explizit durch eine Matrix aus

a) e^A, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *(1 Punkt)*

b)* e^B, mit $B = b\sigma_1$ und $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mittels Taylor-Reihe der Exponentialfunktion. *(2 Punkte)*

c) Dieselbe Funktion wie in (b), diesmal mittels Diagonalisierung von B. *(3 Punkte)*

d) e^C, mit $C = i\Theta\Omega$, wobei $\Omega = n_j S_j$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ ein Einheitsvektor ist ($\| n \| = 1$) und S_j die Spin-$\frac{1}{2}$-Matrizen sind: $S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Berechnen Sie zunächst Ω^2 (dabei ist die Eigenschaft $S_i S_j + S_j S_i = \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbb{1}$) der Spin-$\frac{1}{2}$-Matrizen nützlich) und nutzen Sie dann die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion.

Anmerkung: Die Exponentialform e^C ist eine Darstellung von SU(2)-Transformationen, die Gruppe aller speziellen, unitären Transformationen in $\mathbb{C}^2$. Ihre Elemente werden durch drei kontinuierliche Parameter charakterisiert (hier Θ, n_1 und n_2, mit $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$). Die S_j-Matrizen sind 'Generatoren' dieser Transformationen; sie erfüllen die SU(2)-Algebra, d.h. ihre Kommutatoren liefern $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k$

Aufgabe 4: Systeme von linearen Differentialgleichungen mit nicht diagonalisierbarer Matrix (*12 Punkte*)

Wir betrachten ein Verfahren zur Bestimmung der Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} \tag{1}$$

im Falle einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n, n)$ mit $n-1$ verschiedenen Eigenwerten λ_j und zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$, mit $j = 1, ..., n-1$, wobei der Eigenwert λ_{n-1} eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist (man sagt, seine 'algebraische Vielfachheit' ist zwei). Da λ_{n-1} nur einen zugehörigen Eigenvektor hat ist diese Matrix nicht diagonalisierbar. Sie kann aber auf sog. Jordan Normalform gebracht werden:

$$S^{-1}AS = J \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \qquad S = (\mathbf{v}_1, \cdot, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n).$$

Mit $A = SJS^{-1}$, sowie $\mathbf{v}_j = S\mathbf{e}_j$ und $J\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j + \delta_{jn}\mathbf{e}_{j-1}$ folgt, dass dies äquivalent ist zu

$$A \cdot \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1}\delta_{jn}, \qquad \forall j = 1, ..., n.$$

Für $j = 1, ..., n-1$ entspricht dies der üblichen Eigenwertgleichung und die $\mathbf{v}_j$ den üblichen Eigenvektoren. $\mathbf{v}_n$ ist jedoch kein Eigenvektor, sondern durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(A - \lambda_n \mathbb{1})\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1}. \tag{2}$$

Da $(A - \lambda_n \mathbb{1})$ nicht invertierbar ist, legt diese Gleichung den Vektor $\mathbf{v}_n$ in der Regel nicht eindeutig fest. Verschiedene Wahlen von $\mathbf{v}_n$ führen zu verschiedenen Transformationsmatrizen S, liefern aber alle dieselbe Form der Jordan Matrix J.
Die so erhaltenen λ_j und $\mathbf{v}_j$ können genutzt werden, um eine Lösung für die DGL (1) mit Hilfe eines Exponentialansatzes mit 'Variation der Konstanten' zu finden:

$$\mathbf{x}(t) = O \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j \mathrm{e}^{\lambda_j t} c_j(t), \qquad \text{mit} \qquad \lambda_n = \lambda_{n-1}. \tag{3}$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (1) können nun die Koeffizienten $c_j(t)$ bestimmt werden:

$$0 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right)\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_j \mathrm{e}^{\lambda_j t} \left[\lambda_j c_j(t) + \dot{c}_j(t) - \lambda_j c_j(t)\right] - \mathbf{v}_{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_n t} c_n(t).$$

Koeffizientenvergleich für $\mathbf{v}_j$ ergibt:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{v}_{j\neq n-1}: & \dot{c}_j(t) = 0 & \Rightarrow & c_j(t) = c_j(0) = \text{konst} \\ \mathbf{v}_{n-1}: & \dot{c}_{n-1}(t) = c_n & \Rightarrow & c_{n-1}(t) = c_{n-1}(0) + tc_n(0) \end{array}$$

Die Werte $c_j(0)$ werden mittels der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0)$ festgelegt:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_j \mathbf{v}_j c_j(0) = S\mathbf{c}(0) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{c}(0) = S^{-1}\mathbf{x}(0).$$

Finden Sie nun mit dieser Methode die Lösung der DGL

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

a)* Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A eine einfache und eine doppelte Nullstelle hat, λ_1 bzw. $\lambda_2 = \lambda_3$. *(2 Punkte)*

b) Zeigen Sie, dass die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 beide nur 1-dimensional sind (was bedeutet, dass A nicht diagonalisierbar ist) und finden Sie entsprechende normierte Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. *(3 Punkte)*

c) Finden Sie mittels Gl. (2) einen dritten normierten Vektor $\mathbf{v}_3$, mit der Eigenschaft, dass A mittels $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ in eine Jordan-Normalform gebracht werden kann. Nutzen Sie hierbei die Wahlfreiheit, die für $\mathbf{v}_3$ besteht, um diesen Vektor orthonormal zu $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zu wählen. *(3 Punkte)*

   Anmerkung: Orthonormalität ist für das aktuelle Beispiel erreichbar (und nützlich, da dann $S^{-1} = S^T$ gilt), im allgemeinen jedoch nicht.

d) Bestimmen Sie nun mittels einem Ansatz der Form (3) die Lösung $\mathbf{x}(t)$ der Differentialgleichung (4). *(2 Punkte)*

e) Überprüfen Sie durch explizites Einsetzen, ob Ihre gefundenen Lösung die Differentialgleichung erfüllt *(2 Punkte)*