Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 11

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 01.02.2017**

***Hinweis**: Die erste Klausur (früher Hauptklausur) findet am 21.02.17, 9:00-12:00 Uhr und die zweite Klausur (früher Nachklausur) findet am 04.04.17, 9:00-12:00 Uhr statt. Beide Klausuren sind im großen Hörsaal des Physiktowers.(C6.4)*

Beispielaufgabe 1: Lorentz-Darstellung der Dirac-delta-Funktion

Zeigen Sie, dass die untenstehende Lorentz-Peakfunktion $\delta^{[\epsilon]}$ im Limes $\epsilon \to 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe, (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^{[\epsilon]}(x_b) = \frac{1}{2}\delta^{[\epsilon]}(0), x_b > 0$) und (iii) das Gewicht des Lorentz-Peaks. Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\Theta^{[\epsilon]}(x) = \int_{-\infty}^{x} dy \delta^{[\epsilon]}(y)$ und $\delta'^{[\epsilon]}(x) = \frac{d}{dx}\delta^{[\epsilon]}(x)$. Skizzieren Sie jeweils die drei Funktionen $\Theta^{[\epsilon]}$, $\delta^{[\epsilon]}$, $\delta'^{[\epsilon]}$ (untereinander, mit gleich skalierten x-Achsen).

Lorentz Peak: $\delta^{[\epsilon]} = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}$.

Hinweis: Zur Berechnung des Gewichts empfiehlt sich die Substitution $x = \epsilon \tan y$.
Anmerkung: Lorentz-Peaks kommen in der Physik oft vor. Beispiel: das Energiespektrum eines diskreten Quantenzustands, der schwach an eine Umgebung gekoppelt ist, hat die Form eines Lorentz-Peaks, dessen Breite durch die Kopplungstärke an die Umgebung bestimmt wird. Geht die Kopplungstärke nach Null, ergibt sich ein δ-Peak.

Aufgabe 1: Darstellungen der Dirac-delta-Funktion (*10 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die untenstehende Lorentz-Peakfunktion $\delta^{[\epsilon]}$ im Limes $\epsilon \to 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe (*1 Punkt*), (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^{[\epsilon]}(x_b) = \frac{1}{2}\delta^{[\epsilon]}(0), x_b > 0$) (*2 Punkte*) und (iii) das Gewicht (*2 Punkte*) des Lorentz-Peaks. Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\Theta^{[\epsilon]}(x) = \int_{-\infty}^{x} dy \delta^{[\epsilon]}(y)$ (*2* Punkte*) und $\delta'^{[\epsilon]}(x) = \frac{d}{dx}\delta^{[\epsilon]}(x)$ (*2* Punkte*). Skizzieren Sie jeweils die drei Funktionen $\Theta^{[\epsilon]}$, $\delta^{[\epsilon]}$, $\delta'^{[\epsilon]}$ (untereinander, mit gleich skalierten x-Achsen) (*1* Punkte*).

Gauß Peak: $\delta^{[\epsilon]} = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x/\epsilon)^2}$.

Hinweis: Die Funktion $\Theta^{[\epsilon]}$ lässt sich nicht elementar berechnen; drücken Sie sie stattdessen aus durch die 'Error-Funktion', $\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}y\ e^{-y^2}$, mir $\mathrm{Erf}(\infty) = 1$.
Anmerkung: Gauß-Peaks kommen in der Physik oft vor. Beispiel: Ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator mit Federkonstante k und Potential $\frac{1}{2}kx^2$ hat eine Grundzustandswellenfunktion in Form eines Gauß-Peaks der Breite proportional zu $1/\sqrt{k}$.

Aufgabe 2: Reihendarstellung der periodischen δ-Funktion (*15 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta^{[\epsilon]}(x)$, definiert durch

$$\delta^{[\epsilon]}(x) = \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx-\epsilon|k|}, \quad k = 2\pi n/L, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad w, \epsilon, L \in \mathbb{R}, 0 < \epsilon \ll L, \tag{1}$$

folgende Eigenschaften hat:

a) $\delta^{[\epsilon]}(x) = \delta^{[\epsilon]}(x + L)$. (*2 Punkte*)

b) $\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \delta^{[\epsilon]}(x) = 1$. (*2 Punkte*)

c) $\delta^{[\epsilon]}(x) = \frac{1}{2L}\left[\frac{1+\omega}{1-\omega} + \frac{1+\omega^*}{1-\omega^*}\right] = \frac{1}{L}\frac{1-e^{-4\pi\epsilon/L}}{1+e^{-4\pi\epsilon/L}-2e^{2\pi\epsilon/L}\cos(2\pi x/L)}$,
wobei $\omega = e^{2\pi(ix-\epsilon)/L}$. (*2 Punkte*)

d)
$$\lim_{\epsilon\to 0} \delta^{[\epsilon]}(x) = 0$$
für $x \neq mL$, mit $m \in \mathbb{Z}$. Gehen Sie von c) aus. (*3 Punkte*)

e $\delta^{[\epsilon]}(x) \backsimeq \frac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2+x^2}$ für $|x|/L \ll 1$ und $\epsilon/L \ll 1$. (*2 Punkte*)

f) Skizziieren Sie die Funktion $\delta^{[\epsilon]}(x)$ qualitativ für $\epsilon/L \ll 1$ und $x \in \left[-\frac{7}{2}L.\frac{7}{2}L\right]$. (*2 Punkte*)

g)* Folgern Sie, dass $\delta^{[\epsilon]}(x)$ im Limes $\epsilon \to 0$ eine periodische δ-Funktion darstellt, mit
$$\delta^{[0]}(x) = \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - ml).$$
(*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Getriebener harmonischer Oszillator (*15 Punkte*)

Wir wollen in dieser Aufgabe den getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillator etwas näher untersuchen und die zugehörige inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F\cos\omega t \tag{2}$$

mit Eigenfrequenz der ungedämpften, ungetriebenen Schwingung ω_0, Dämpfungskonstante γ, Antriebsfrequenz ω und Antriebsamplitude F.

a) Zur Lösung der inhomogenen Gleichung (2) müssen wir zuerst eine Lösung der homogenen Gleichung
$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$
finden. Diese Gleichung beschreibt einen gedämpften, ungetriebenen harmonische Oszillator. Lösen Sie Gleichung (3) für den Schwingfall ($\gamma^2/4 < \omega_0^2$) und finden Sie so die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $x_h(t)$. (*2 Punkte*)

b) Es sei $x_p(t)$ eine spezielle Lösung von (2). Zeigen Sie, dass dann auch $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ eine Lösung zu dßer inhomogenen DGL (2) angibt, wobei $x_h(t)$ die in (a) gefundenen homogene Lösung (2) ist. (*1 Punkt*)

c) Wir wollen nun eine solche spezielle Lösung von (2) finden. Es sein $y(t)$ eine komplexe Funktion, wobei wir diese schreiben können als $y(t) = C\mathrm{e}^{i\omega t}$ (beachen Sie, dass C eine komplexe Amplitude ist). Zeigen Sie dass falls $y(t)$ die Gleichung
$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = F\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{4}$$
löst, der Realteil dieser Lösung $\mathrm{Re}(y(t))$ eine Lösung von (2) beschreibt. (*2 Punkte*)
Hinweis: Nutzen Sie dazu die Relation $\mathrm{e}^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$.

d) Mit dem Wissen aus (c): Finden Sie eine spezielle Lösung $y_p(t)$ von (4) mit dem Ansatz $y(t) = C\mathrm{e}^{i\omega t}$ und geben berechnen Sie daraus eine spezielle Lösung $x_p(t)$ von (2). Zeigen Sie, dass Sie diese folgendermaßen Ausdrücken können: $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$, wobei A die reelle Amplitude der getriebenen Schwingung und Φ die zugehörige Phasenverschiebung ist. *(4 Punkte)*
Hinweis: Komplexe Zahlen c können allgemein geschrieben werden als $c = A\mathrm{e}^{i\Phi}$, mit $A = \sqrt{cc^*}$ und $\tan\Phi = \frac{\mathrm{Im}(c)}{\mathrm{Re}(c)}$.

e) Sie kennen aus (b) bereits die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $x_h(t)$. Setzen Sie diese mit der speziellen Lösung $x_p(t)$ aus (d) zusammen und geben Sie eine allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Nutzen Sie dabei was sie in (a) gezeigt haben. (Wir betrachten in dieser Aufgabe immer nur den Schwingfall $\gamma^2/4 < \omega_0^2$) *(1 Punkt)*

f)* Untersuchen Sie die Fälle:

i) Langsamer Antrieb: $\omega \ll \omega_0$ *(1 Punkt)*

ii) Schneller Antrieb: $\omega \gg \omega_0$ *(1 Punkt)*

iii) Resonanter Antrieb: $\omega = \omega_0$ *(1 Punkt)*

g) Wir betrachten nun einen komplexeren Antrieb der Form

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\omega_n t),$$

wobei F_n reelle Koeffizienten sind. Geben Sie eine allgemeine Lösung der DGL

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

an. *(2 Punkte)*
Hinweis: Nutzen Sie das Superpositionsprinzip!