Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 08.02.2017**

***Hinweis**: Die erste Klausur (früher Hauptklausur) findet am 21.02.17, 9:00-12:00 Uhr und die zweite Klausur (früher Nachklausur) findet am 04.04.17, 9:00-12:00 Uhr statt. Beide Klausuren sind im großen Hörsaal des Physiktowers.(C6.4)*

Beispielaufgabe 1: Eigenschaften der Fourier-Transformation

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation, wobei a jeweils eine beliebige reelle Konstante ist.

a) Die Fourier-Transformierte von $f(x-a)$ ist $e^{-ika}\tilde{f}_k$.

b) Die Fourier-Transformierte von $f(ax)$ ist $e\tilde{f}_{k/a}/|a|$, wobei $a \neq 0$.

Beispielaufgabe 2: Fourier-Transformation eines Gauß-Peaks

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte eines normierten Gauß-Peaks mit Breite σ, $g^{[\sigma]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}$, durch $\tilde{g}_k^{[\sigma]} = e^{-\sigma^2 k^2/2}$ gegeben ist.

Aufgabe 1: Fourier-Reihen (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen für folgende periodische Funktionen, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L jeweils zu wählen? Skizzieren Sie zunächst die Funktionen.

a) $f(x) = |sin(x)|$ (*5 Punkte*)

b) $f(x) = 4x,\ -\pi \leq x < 0,\ f(x) = 2x, 0 \leq x < \pi$ und f 2π-periodisch. (*5 Punkte*)

Aufgabe 2: Sinusreihen (*10 Punkte*)

Die Funktion f auf dem Intervall $I = [-L/2, L/2]$ habe die Fourier-Reihendarstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_k e^{ikx}\tilde{f}_k$.

a) Sei nun f eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$. Zeigen Sie, dass dann die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_k = -i2\int_0^{L/2} \mathrm{d}x sin(kx) f(x)$ gegeben sind, und ferner, dass $f(x)$ durch eine Sinus-Reihe der Form $f(x) = \sum_{k>0} b_k sin(kx)$ dargestellt werden kann, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet b_k, ausgedrückt durch $\tilde{f}_k$?

b)* Betrachten Sie nun folgende Funktion: $f(x) = 1$ für $0 < x < L/2$, $f(x) = -1$ für $-L/2L < x < 0$. Skizzieren Sie diese und berechnen Sie die Koeffizienten $\tilde{f}_k$ und b_k der entsprechenden Fourier- und Sinus-Reihen. (*5 Punkte*)

Aufgabe 3: Eigenschaften der Fouriertransformation (*10 Punkte*)

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der zweidimensionalen Fourier-Transformation, wobei $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}$und R Drehmatrix.

a) Die Fourier-Transformierte von $f(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{a})$ ist $e^{-i\mathbf{ka}}\tilde{f}_{\mathbf{k}}$. (*3 Punkte*)

b)* Die Fourier-Transformierte von $f(\alpha\mathbf{x})$ ist $e\tilde{f}_{\mathbf{k}/a}/|\alpha|^2$. (*3 Punkte*)

c) Die Fourier-Transformierte von $f(R\mathbf{x})$ ist $\tilde{f}_{R\mathbf{k}}$. (*4 Punkte*)

Aufgabe 4: Faltung von Gauß-Peaks (*10 Punkte*)

Ein normierter Gauß-Peak mit Breite σ hat die Form $g^{[\sigma]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$. Zeigen Sie, dass die Faltung von zwei normierten Gauß-Peaks mit Breiten σ_1 und σ_2 wieder ein normierter Gauß-Peak ist, mit Breite $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Zeigen Sie dies auf zwei Weisen, (a) und (b):

1. Berechnen Sie das Faltungsintegral mittels quadratischer Ergänzung im Exponenten.(*4 Punkte*)

2. Nutzen Sie das Faltungstheorem und die bekannte Form der Fouriertransformation eines Gauß-Peaks. (*4 Punkte*)

c)* Machen Sie qualitative Skizzen aller Gauß-Peaks und ihrer Fourierspektren. Erläutern Sie warum die Faltung einer Funktion mit einer gepeakten Funktion zu einer verbreiterten Version der ersten Funktion führt. (*2 Punkte*)