Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 09.11.2016**

Erinnerung: *Aufgaben die mit (*) gekennzeichnet sind müssen nur von denjenigen bearbeitet werden die die 7 CP Version der Vorlesung benötigen (BA-Physik + alle anderen, die zuätzliche 2 CP im WP Bereich einbringen wollen)*
Hinweis: *Kennzeichnen Sie ihre Abgabe* ***oben auf dem ersten Blatt deutlich*** *mit den Namen aller die gemeinsam abgeben sowie ihrer Übungsgruppe. Verwenden Sie zum Zusammenhalten der einzelnen Blätter einen Tacker; verwenden Sie* ***nicht:*** *Umschläge, Klarsichtfolien, Mappen, Büroklammern, Haarklammern, etc. und falten Sie ihre Abgabe nicht. Wir ermutigen Sie dazu in Gruppen abzugeben.*

Aufgabe 1: Orthonormalisierung (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils die Dimension des Spans und finden Sie mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis deren erster Basisvektor parallel zu $\mathbf{v}_1$ liegt.

Beispielaufgabe

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^T$

(b) $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (-3i, -3i, 0)^T$

Hausaufgabe

(a) $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 0)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (1, -3, 0)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (3, 4, -2)^T$

(b) $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 3)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (2, -5, -4)^T$

(c) $\mathbf{v}_1 = (2, 3, 4, 5)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (-3, 5, 0, 1)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (2, 2, 2, 2)^T, \quad \mathbf{v}_4 = (1, 10, 6, 8)^T$

Beispielaufgabe : Vektorraum der Monome vom Grad 2

Der Vektorraum aller reeller Funktionen ist unendlichdimensional. Falls jedoch nur Funktionen einer vorgeschriebenen Form betrachtet werden, kann der entsprechende Vektorraum endlichdimensional sein. Als Beispiel wird in dieser Aufgabe gezeigt, dass die Menge aller Monome vom Grad 2 einen Vektorraum der Dimension 1 bildet, der isomorph zu $\mathbb{R}$ ist. p_a bezeichne ein Monom in der Variable $x \in \mathbb{R}$ vom Grad 2, eindeutig bestimmt durch den Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$:

$$p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto p_a(x) \equiv ax^2$$

$P_2 = \{p_a | a \in \mathbb{R}^1\}$ sei die Menge aller solcher Monome. Die naheliegende Definition der Addition von Monomen oder deren Multiplikation mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ sind

$$\begin{aligned} p_a + p_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto p_a(x) + p_b(x), \\ cp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto cp_a(x). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass obige Definitionen von Addition und skalarer Multiplikation zu folgenden Verknüpfungsregeln in P2 führen,

Addition von Monomen: $+ : \ P_2 \times P_2 \to P_2, \quad (p_a, p_b) \mapsto p_a + p_b = p_{a+b}$
Skalare Multiplikation:$* : \mathbb{R} \times P_2 \to P_2, \quad (c, p_a) \mapsto cp_a = p_{ca}.$

(b) Zeigen Sie, dass $(P_2, +, *)$ ein zu $\mathbb{R}$ isomorpher $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(c) Geben Sie eine Basis für $(P_2, +, *)$ an.

Aufgabe 2: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik (*10 Punkte*)

Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 2, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 2)^T$ und $v_3 = (2, 2, 0)^T$ in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

(a) Drücken Sie den Standardbasisvektoren jeweils als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 aus. aus. Bilden v_1, v_2 und v_3 eine Basis für $\mathbb{R}^3$? (*3 Punkte*)

(b) $\mathbf{x} = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ und $\mathbf{y} = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$ seien zwei Vektoren deren Komponenten bzgl. v_1, v_2 und v_3 gegeben seien durch $x_1 = 2, x_2 = -5, x_3 = 3$ bzw. $y_1 = 4, y_2 = -1, y_3 = -2$. Drücken Sie $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als Spaltenvektoren in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ aus und berechnen Sie deren Skalarprodukt. (*4 Punkte*)

(c) Berechnen Sie die Komponenten der Metrik $gij = \mathbf{v}_i\mathbf{v}_j$ explizit. (*3 Punkte*)

(d) Berechnen Sie nun das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ mittels der Formel $\mathbf{xy} = \sum_{i,j} x_i g_{ij} y_j$. (*4 Punkte*)

Aufgbe 3: Inneres Produkt und Norm für Vektorraum stetiger Funktionen (*10 Punkte*)

Diese Aufgabe illustriert ein besonders wichtiges Beispiel eines inneren Produkts: im Raum der stetigen Funktionen kann ein inneres Produkt mittels Integration definiert werden. V sei der Vektorraum V der stetigen reellen Funktionen auf einem Interval $I \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, mit den üblichen Verknüpfungsregeln der Vektoraddition und skalaren Multiplikation:

$$\begin{array}{lll} \forall f, g \in V : & f + g : I \to \mathbb{R}, & x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x), \\ \forall f \in V, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}, & x \mapsto (\lambda \cdot f)(x) = \lambda(f(x)) \end{array}$$

a) Weisen Sie nach, dass folgende Abbildung ein inneres Produkt auf V darstellt:

$$< .,. >: V^2 \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto < f, g > \equiv \int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(*7 Punkte*)

b) Sei nun $I = [-1, 1]$. Berechnen Sie $< f_1, f_2 >$ für $f_1(x) \equiv \sin(x)$ und $f_2(x) \equiv \cos(x)$. (*3 Punkte*)

Aufgbe 4*: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln (*10 Punkte*)

Für alle $a \in \mathbb{R}^2$, sei $V_a \equiv v_x$ eine Menge, deren Elemente v_x, indiziert durch zwei-dimensionale reelle Vektoren $x \in \mathbb{R}_2$, die folgenden Rechenregeln erfüllen:

$$\begin{array}{lll} \text{Addition :} & + : V_a \times V_a \to V_a, & (v_x, v_y) \mapsto v_x + v_y \equiv v_{x+y-a} \\ \text{MultiplikationmiteinemSkalar :} & \cdot : \mathbb{R} \times V_a \to V_a, & (\lambda, v_x) \mapsto \lambda \cdot V_x \equiv v_{\lambda x} + f(a, \lambda) \end{array}$$

Hier ist $(f(a, \lambda))$ eine in a und λ lineare Funktion.

a) Zeigen Sie, dass V_a mit der Addition $+$ eine abelsche Gruppe ist und bestimmen Sie das neutrale Element sowie das Inverse von v_x bezüglich der Addition. *(4 Punkte)*

b) Finden Sie die spezielle Form von f, so dass das Tripel $(Va, +, \cdot)$ ein R-Vektorraum ist. *(4 Punkte)*

c) Kann Ihre Konstruktion auf $a, x \in \mathbb{R}^n$ (wobei n eine positive, ganze Zahl ist) anstelle von $\mathbb{R}^2$ erweitert werden? *(2 Punkte)*