Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 16.11.2016**

Erinnerung: *Aufgaben die mit (*) gekennzeichnet sind müssen nur von denjenigen bearbeitet werden die die 7 CP Version der Vorlesung benötigen (BA-Physik + alle anderen, die zuätzliche 2 CP im WP Bereich einbringen wollen)*
Hinweis: *Kennzeichnen Sie ihre Abgabe* ***oben auf dem ersten Blatt deutlich*** *mit den Namen aller die gemeinsam abgeben sowie ihrer Übungsgruppe. Verwenden Sie zum Zusammenhalten der einzelnen Blätter einen Tacker; verwenden Sie* ***nicht***: *Umschläge, Klarsichtfolien, Mappen, Büroklammern, Haarklammern, etc. und falten Sie ihre Abgabe nicht. Wir ermutigen Sie dazu in Gruppen abzugeben.*

Beispielaufgabe: Spatprodukt

Diese Aufgabe illustriert einen wichtigen Bezug zwischen dem Spatprodukt und der Frage, ob drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind oder nicht.
(b)

(a) Berechnen Sie das Spatprodukt $S(y)$ von $\mathbf{v}_1 = (1,0,2)^T, \mathbf{v}_2 = (3,2,1)^T$ und $\mathbf{v}_3 = (-1,-2,y)^T$ als Funktion der Variablen y.

(b) Finden Sie durch Lösen der Vektorgleichung $\sum_i \mathbf{v}_i a_i = 0$ denjenigen Wert von y für den $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ nicht linear unabhängig sind.

(c) Welchen Wert hat $S(y)$ für den in (b) gefundenen Wert von y? Interpretieren Sie das Ergebnis!

Beispielaufgabe : Natürliche Parametrisierung einer Kurve

Gegeben sei die Raumkurve $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T \in \mathbb{R}^2$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Skizzieren Sie die Raumkurve qualitativ.

(b) Bestimmen Sie ihre Bogenlänge $s(t)$ im Zeitinterval $[0,t]$.

(c) Geben Sie die natürliche Parametrisierung $r_L(s)$ an.

Aufgabe 1*: Lagrange-Identität (*10 Punkte*)

(a) Beweisen Sie die Lagrange-Identität für beliebige Vektoren **a,b,c,d** $\in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Hinweis: Nutzen Sie den Levi-Cevita-Tensor. (*4 Punkte*)

(b) Berechnen Sie (mittels (a)) den Betrag $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ und drücken Sie das Ergebnis aus durch $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$und den Winkel ϕ, den die Vektoren **a** und **b** einschliessen. (*3 Punkte*)

(c) Überprüfen Sie die Lagrange-Identität explizit für $\mathbf{a} = (1,2,-1)^T$, $\mathbf{b} = (1,2,1)^T$, $\mathbf{c} = (-3,0,1)^T$, $\mathbf{d} = (0,1,2)^T$, indem Sie alle Terme separat berechnen. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Kurvengeschwindigkeit und Beschleunigung (*10 Punkte*)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t)|t \in \mathbb{R}, \mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^{-t^3}, a\mathrm{e}^{\mathrm{t}^3})^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^2\}$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{r}}(t)$. Lässt sich $\mathbf{r}(t)$ durch $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ ausdrücken? (*4 Punkte*)

(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter t durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $a = 2$. (*3 Punkte*)

(c) Berechnen Sie $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$. Finden Sie die Zeit $t(a)$ zu der gilt $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ (*3 Punkte*)

Aufgbe 3: Natürliche Parametrisierung einer Kurve (*10 Punkte*)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\mathbf{r}(t)|t \in [0, \tau], \mathbf{r}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{ct}}(\mathrm{cos}\omega\mathrm{t}, \mathrm{sin}\omega\mathrm{t})^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^2\}$, mit $\omega, c \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $\tau = \frac{8\pi}{\omega}$ und $c = \frac{1}{\tau}$. (Diese Angaben gelten nur für Teilaufgabe (a), nicht für (b-f).) (*2 Punkte*)

b) Berechnen Sie den Betrag der Kurvengeschwindigkeit $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$. (*2 Punkte*)

c) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ im Intervall $[0, t]$. (*2 Punkte*)

d) Bestimmen Sie die natürliche Parametrisierung $\mathbf{r}_L(s)$. (*2 Punkte*)

e) Überprüfen Sie explizit, dass $\left|\frac{d\mathbf{r}_l}{ds}\right|$ gilt. (*2 Punkte*)

Aufgbe 4: Linienintegral (*10+2 Punkte*)

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2, , z, y)^T$ ein dreidimensionales Vektorfeld in kartesischen Koordinaten, mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$. Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ entlang folgender Wege vom Ursprung $\mathbf{r}_0 \equiv (0, 0, 0)^T$ nach $\mathbf{r}_1 \equiv (0, 2, -1)^T$:

a) $\gamma_a = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ist der zusammengesetzte Weg aus γ_1 der geraden Linie von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_2 \equiv (1, 1, 1)^T$, und γ_2, der geraden Linie von $\mathbf{r}_2$ nach $\mathbf{r}_1$. (*4 Punkte*)

b) γ_b ist parametrisiert durch $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{sin}\pi\mathrm{t}, 2\mathrm{t}^{0.5}, -\mathrm{t}^2)^\mathrm{T}$, mit $0 \leq t \leq 1$. (*3 Punkte*)

c) γ_c ist eine in der $y - z-$Ebene liegenden Parabel der Form $z(y) = y^2 - \frac{5}{2}y$. (*3 Punkte*)

d) *Zusatzpunkte:* Erklären Sie. (*2 Punkte*)