Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 23.11.2016**

Erinnerung: *Aufgaben die mit (*) gekennzeichnet sind müssen nur von denjenigen bearbeitet werden die die 7 CP Version der Vorlesung benötigen (BA-Physik + alle anderen, die zuätzliche 2 CP im WP Bereich einbringen wollen)*
Hinweis: *Kennzeichnen Sie ihre Abgabe* ***oben auf dem ersten Blatt deutlich*** *mit den Namen aller die gemeinsam abgeben sowie ihrer Übungsgruppe. Verwenden Sie zum Zusammenhalten der einzelnen Blätter einen Tacker; verwenden Sie* ***nicht***: *Umschläge, Klarsichtfolien, Mappen, Büroklammern, Haarklammern, etc. und falten Sie ihre Abgabe nicht. Wir ermutigen Sie dazu in Gruppen abzugeben.*

Beispielaufgabe 1: Explizite Koordinatenumrechnung

Die kartesischen Koordinaten (x, y, z) von drei Punkten seine $P_1 : (3, -2, 4)$, $P_2 : (1, 1, 1)$ und $P_3 : (-3, 0, 2)$. Wie lauten die Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) und die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) dieser drei Punkte? (Winkel sind in Radian anzugeben.)

Beispielaufgabe 2: Polarkoordinaten: Linienintegral entlang einer Spirale

Die Kurve $\gamma_S = \left\{\mathbf{r}(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2 | \rho = R + \frac{1}{2\pi}\phi\Delta\right\}$, mit $0 < R$, $\Delta \in \mathbb{R}$, beschreibt einen Spiralweg in zwei Dimensionen, parametrisiert mittels Polarkoordinaten.

a) Skizzieren Sie den Spiralweg γ_S und berechnen Sie das Linienintegral $W_1[\gamma_S] = \int_{\gamma_S} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_1$ des Feldes $\mathbf{F}_1 = \hat{\mathbf{e}}_\phi$ entlang γ_S.

b) Berechnen Sie das Linienintegral $W_2[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_2$ des Feldes $\mathbf{F}_2 = \hat{\mathbf{e}}_x$ entlang des geraden Weges γ_G vom Punkt $(R, 0)^T$ zum Punkt $(R + \Delta, 0)^T$, sowie entlang des Spiralwegs γ_S. Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen? Erklären Sie!

Aufgabe 1: Linienintegral: Bergwanderung (*10 Punkte*)

Zwei Wanderer wollen vom Punkt $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ im Tal zu einer Hütte am Punkt $\mathbf{r}_1 = (3, 3a)$ wandern. Wanderer 1 wählt den geraden Weg zwischen Tal und Hütte, γ_1. Wanderer 2 wählt einen parabolischen Weg, γ_2, über den Gipfel bei $\mathbf{r}_2 = (2, 4a)^T$, dem Scheitel der Parabel (vgl. Abb. 1). Auf sie wirkt die Schwerkraft $\mathbf{F}_g = -10\hat{\mathbf{e}}_y$, sowie eine höhenabhängige Windkraft, $\mathbf{F}_w = -y^2\hat{\mathbf{e}}_x$.
Finden Sie die von den Wanderern entlang γ_1 und γ_2 verrichtete Arbeit, $W[\gamma_i] = -\int_{\gamma_i} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$, als Funktion des Parameters a.

Aufgabe 2: Koordinatentransformation (*4 Punkte*)

a) Der Punkt P_1 habe die Kugelkoordinaten $(r, \theta, \phi) = (2, \pi/4, 3\pi/4)$. Wie lauten seine kartesischen und Zylinderkoordinaten, (x, y, z) bzw. (ρ, ϕ, z)? (*2 Punkte*)

b) Der Punkt P_2 habe Zylinderkoordinaten $(\rho, \phi, z) = (4, \pi/2, 1)$. Wie lauten seine kartesischen und Kugelkoordinaten? (Winkel sind in Radian anzugeben). (*2 Punkte*)

Aufgabe 3: Kugelkoordinaten: Geschwindigkeit, kinetische Energie, Drehimpuls (*10 Punkte*)

Der Bezug zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten ist gegeben durch $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, mit $r \in [0,\infty)$, $\phi \in [0,2\pi)$, $\theta \in [0,\pi]$.

Lokale Basis:

a) Konstruieren Sie das lokale Dreibein $\mathbf{e}_{y_i}$ (*4 Punkte*)

b) Zeigen Sie explizit, dass folgende Relation gilt: $\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{y_j} = \delta_{ij}$ (*1 Punkt*)

c) Zeigen Sie explizit, dass folgende Relation gilt: $\hat{\mathbf{e}}_{y_i} \times \hat{\mathbf{e}}_{y_j} = \epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{e}}_k$ (*2 Punkte*)

Physikalische Größen: Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten

c) Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ gegeben ist als $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\phi$(*1 Punkt*)

d) Die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ gegeben ist als $T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right]$(*1 Punkt*)

e) Der Drehimpulsvektor $\mathbf{L} = m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$ gegeben ist als $\mathbf{L} = mr^2\left[\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\phi - \dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta\right]$ (*1 Punkt*)

Aufgabe 4*: Linienintegral in Zylinderkoordinaten: Badewannenfluss (*10 Punkte*)

Eine Seifenblase treibt entlang einer spiralförmigen Bahn γ auf das Abflussloch der Badewanne zu. In Zylinderkoordinaten ist die Bahn beschrieben durch $\rho(t) = \rho_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, $\phi(t) = \omega t$, $z(t) = z_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$, mit $\rho_0 > \rho_a$ und $t \in [0, t_a]$, wobei der Radius ρ_a der Radius des Abflussloches ist und $t_a = \tau\ln(\rho_0/\rho_a)$ die Zeit, nach der das Abflussloch erreicht wird.

a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Bahn (z.B. für $\omega = 6\pi/\tau$ und $\rho_0 = 10\rho_a$). (*2 Punkte*)

b) Wie lautet die Kurvengeschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ in Zylinderkoordinaten? Was ist der Betrag der Endgeschwindigkeit $v_a = \|\mathbf{v}_a(t)\|$? (*2,5 Punkte*)

c) Zeigen Sie, dass die Länge der Bahn durch $L[\gamma] = \tau v_a(\rho_0/\rho_a - 1)$ gegeben ist. (*2,5 Punkte*)

d) Berechnen Sie mittels des Linienintegrals $W[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$ die Arbeit, die die Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$ entlang der Bahn geleistet hat. Interpretieren Sie dieses Ergebnis für $W[\gamma]$ physikalisch! (*3 Punkte*)

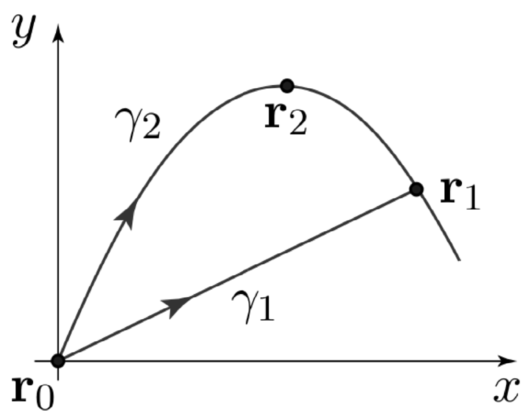

Abbildung 1: Skizze der zwei Wege γ_1 und γ_2.

Aufgabe 5: Gradient für $f(r)$ (*6 Punkte*)

a) Für $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\|$, berechnen Sie ∇r, ∇r^2 und $\nabla \cdot \mathbf{r}$ (*3 Punkte*)

b) $f(r)$ sei eine allgemeine, zweimal differenzierbare Funktion von r. Berechnen Sie $\nabla f(r)$ und $\nabla \cdot \nabla f(r)$, ausgedrückt durch $f'(r)$ und $f''(r)$, die erste und zweite Ableitung von f nach r. (*3 Punkte*)