Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 5

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 30.11.2016**

Erinnerung: *Aufgaben die mit (*) gekennzeichnet sind müssen nur von denjenigen bearbeitet werden die die 7 CP Version der Vorlesung benötigen (BA-Physik + alle anderen, die zuätzliche 2 CP im WP Bereich einbringen wollen)*

Beispielaufgabe 1: Volumen und Trägheitsmoment eines Kegelstumpfes

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer Drehachse ist definiert als $I = \int_V \mathrm{d}V \rho_0(\mathbf{r}) d_\perp^2(\mathbf{r})$, wobei $\rho_0(\mathbf{r})$ die Dichte am Punkt $\mathbf{r}$ ist und $d_\perp(\mathbf{r})$ der senkrechte Abstand zur Drehachse.
$K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | H \leq z \leq 2H, \sqrt{x^2 + y^2} \leq az\}$ sei ein homogener, auf der z-Achse zentrierter Kegelstumpf. Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten

a) sein Volumen $V_K(a)$, und

b) sein Trägheitsmoment $I_K(a)$ bezüglich der z-Achse,

als Funktionen des dimensionslosen, positiven Skalenfaktors a, des Längenparameters H, und der Masse M des Kegelstumpfs.

Beispielaufgabe 2: Rotationsparaboloid

Der Rotationsköper K werde von oben durch die Ebene $z = z_{\max}$ begrenzt, und von unten durch den Rotationsparaboloid P , der durch die Rotation der Parabel $z(x) = x_2$ um die z-Achse entsteht

a) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

b) Berechnen Sie die Fläche A des paraboloid gekrümmten Anteils der Oberfläche von K.

Aufgabe 1*: Fluss eines elektrischen Feldes durch Zylinder (*10 Punkte*)

Betrachten Sie einen Zylinder mit Mittelpunkt am Ursprung, Länge $2h$ und Radius R. Am Ursprung befinde sich eine Punktladung Q, die ein elektrisches Feld der Form $E(\mathbf{r}) = E_0\mathbf{r}/r^3$ erzeugt, mit $E_0 = Q/(4\pi\epsilon_0)$. Finden Sie den Fluss $\Phi_z = \Phi_D + \Phi_B + \Phi_M$ dieses Feldes nach außen durch die gesamte Oberfläche des Zylinders, also durch die Decke (Φ_D), durch den Boden (Φ_B) sowie durch den Mantel (Φ_M).

Aufgabe 2: Hyperbolischer Rotationskörper (Gabriel's Horn) (*10 Punkte*)

Berechnen Sie das Volumen des Körpers K, der durch die Rotation der Funktion $\rho(z) = 1/z$ mit $1 \leq z \leq a$ um die z-Achse erzeugt wird. Geben Sie auch das Integral für die Oberfläche dieses Körpers an. Schätzen Sie dieses Integral nach unten hin ab, indem Sie die Ungleichung $\sqrt{z^{-4} + 1} \geq 1$ verwenden. Wie groß sind dann Volumen und Oberfläche im Limes $a \longrightarrow \infty$? Dieser Körper ist als Gabriels Horn oder Torricellis Trompete bekannt.

Aufgabe 3: Volumenintegral über Viertelkugel (*10 Punkte*)

Berechnen Sie mittels Kugelkoordinaten das Volumenintegral $F(R) = \int_K \mathrm{d}V f(\mathbf{r})$ der Funktion $f(\mathbf{r}) = xy$ über die Viertelkugel K, definiert durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ und $x, y \geq 0$. Skizzieren Sie K.

Aufgabe 4: Satz von Gauß – Keilring (*10 Punkte*)

Der in der Skizze 1 grau schattierte "Keilring", K, wird in Kugelkoordinaten beschrieben durch $0 \leq r \leq R$ und $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$. (Solch ein ringartiges Objekt, mit keilförmigem Innenprofil und gerundetem Außenprofil, entsteht aus einer Kugel mit Radius R durch Herausschneiden eines um die z-Achse zentrierten Doppelkegels mit Öffnungswinkel $\pi/3$.)
Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss Φ_K des Vektorfelds $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^2\mathbf{e}_r$ durch die Oberfläche ∂K des Keilrings, auf zwei verschiedene Arten:

a) Berechnen Sie das Flussintegral $\Phi_K = \int_{\partial K} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$ explizit. (*3 Punkte*)

b) Drücken Sie das Flussintegral mittels dem Satz von Gauß durch ein Volumenintegral über die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{F}$ aus, und berechnen Sie dieses Volumenintegral explizit. (*4 Punkte*)
Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\mathrm{sin}\theta}\partial_\theta \left(\mathrm{sin}\theta F_\theta\right) + \frac{1}{r\mathrm{sin}\theta}\partial_\phi F_\phi.$$

(c*) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\mathrm{cos}\theta\mathbf{e}_\theta$ den nach außen gerichteten Fluss durch die Oberfläche des Keilrings, entweder direkt oder mittels dem Satz von Gauß. (*4 Punkte*)

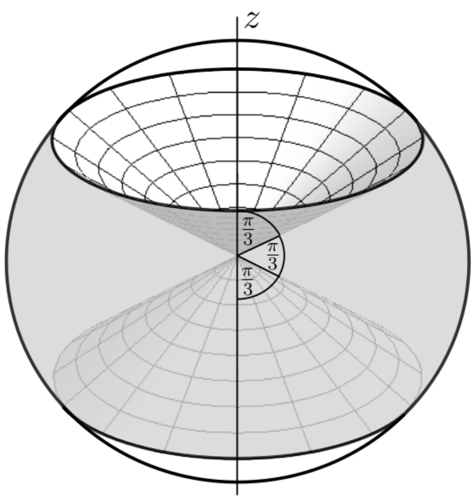

Abbildung 1: Keilring