Theoretische Physik 1a: Rechenmethoden der Mechanik
Übungsblatt 6

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Tobias Chasseur, M.Sc.
Marius Schöndorf, M.Sc.

WS 2016/2017 **Abgabe 14.12.2016**

***Erinnerung**: Aufgaben die mit (*) gekennzeichnet sind müssen nur von denjenigen bearbeitet werden die die 7 CP Version der Vorlesung benötigen (BA-Physik + alle anderen, die zuätzliche 2 CP im WP Bereich einbringen wollen)*

Beispielaufgabe 1: Matrixmultiplikation

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von zwei der folgenden Matrizen:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Beispielaufgabe 2: Matrixinversion

M_n sei eine $n \times n$-Matrix mit Matrixelementen $(M_n)_{ij} = m\delta_{i,j} + \delta_{1,j}$, mit $i, j = 1, \dots n$.

(a) Finden Sie die inversen Matrizen M_2^{-1} und M_3^{-1}. Verifizieren Sie in beiden Fällen, dass $M_n^{-1} M_n = \mathbb{1}$ gilt.

(b) Formulieren Sie anhand der Ergebnisse von (a) eine Vermutung für die Form der inversen Matrix M_n^{-1} für ein allgemeines n. Überprüfen Sie diese durch Berechnung von $M_n^{-1} M_n$.

(c) Geben Sie eine kompakte Formel für die Matrixelemente $(M_n^{-1})_{ij}$ an, und zeigen Sie, dass $\sum_l (M_n^{-1})_{il} (M_n)_{lj} = \delta_{i,j}$.

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie alle möglichen Produkte von zwei der folgenden Matrizen:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(*5 Punkte*)

b) A und B seien $N \times N$-Matrizen mit Matrixelementen $a^i_j = A_i \delta^i_{N+1-j}$ und $b^i_j = B_i \delta^i_j$. *Hinweis:* da die Indizes i und j links vorgegeben sind, wird rechts **nicht** über sie summiert, obwohl bei b^i_j der Index i rechts doppelt vorkommt.

i) Geben Sie für $N = 3$ diese Matrizen explizit in der üblichen Matrixdarstellung an und berechnen Sie das Matrixprodukt AB explizit. (*2 Punkte*)

ii) Berechnen Sie das Produkt AB für allgemeine $N \in \mathbb{N}$. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Spin-1 Matrizen **(*10 Punkte*)**

Zur Beschreibung quantenmechanischer Teilchen mit Spin 1 werden folgende Matrizen benutzt:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $\mathbf{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$. (*2,5 Punkte*)

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren $[S_x, S_y]$, $[S_y, S_z]$ und $[S_z, S_x]$ und drücken Sie das Ergebnis jeweils wieder durch eine der oben angegebenen Matrizen aus. *Hinweis:* $[A, B] = AB - BA$. (*7,5 Punkte*)

Aufgabe 3: Matrixinversion I **(*10 Punkte*)**

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 8-3a & 2-6a & 2 \\ 2-6a & 5 & -4+6a \\ 2 & -4+6a & 5+3a \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie für $a = \frac{1}{3}$ die inverse Matrix A^{-1} mittels Gauß-Algorithmus.(*Anmerkung:* Es empfiehlt sich das Auftreten von Brüchen möglichst so lange zu vermeiden, bis die linke Seite in Zeilen-Stufen-Form gebracht worden ist). Nutzen Sie das Ergebnis um die Lösung für $\mathbf{b} = (4, 1, 1)^T$ zu ermitteln. (*4 Punkte*)

b) Für welche Werte von a ist die Matrix A nicht invertierbar? (*3 Punkte*)

c) Falls A invertierbar ist, hat das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung, nämlich $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Falls A nicht invertierbar ist, ist die Lösung entweder nicht eindeutig, oder es existiert keine Lösung. Welcher dieser beiden Fälle auftritt, hängt von $\mathbf{b}$ ab. Entscheiden sie dies für $\mathbf{b} = (4, 1, 1)^T$ und die in (b) gefundenen Werte von a und bestimmen Sie $\mathbf{x}$, falls möglich. (*3 Punkte*)

Aufgabe 4*: Matrixinversion II **(*10 Punkte*)**

M_n sei eine $n \times n$-Matrix mit Matrixelementen $(M_n)_{ij} = m\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}$, mit $i, j = 1, \ldots n$.

(a) Finden Sie die inversen Matrizen M_2^{-1} und M_3^{-1}. Verifizieren Sie in beiden Fällen, dass $M_n^{-1} M_n = \mathbb{1}$ gilt. (*3 Punkte*)

(b) Formulieren Sie anhand der Ergebnisse von (a) eine Vermutung für die Form der inversen Matrix M_n^{-1} für ein allgemeines n. Überprüfen Sie diese durch Berechnung von $M_n^{-1} M_n$. (*4 Punkte*)

(c) Geben Sie eine kompakte Formel für die Matrixelemente $(M_n^{-1})_{ij}$ an, und zeigen Sie, dass $\sum_l (M_n^{-1})_{il} (M_n)_{lj} = \delta_{i,j}$. (*3 Punkte*)